8. Oktober 2024

Blatt 2: Rechnen mit Vektoren (2), elementare Funktionen

Aufgabe 11: Kreuzprodukt

Berechnen Sie das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ folgender Vektoren:

(a) $\vec{a} = (1\,;\,3\,;\,6)\ ,\quad \vec{b} = (-6\,;\,-3\,;\,-1)$

(b) $\vec{a} = (5\,;\,0\,;\,1)\ ,\quad \vec{b} = (2\,;\,-7\,;\,3)$

Aufgabe 12: Spatprodukt

Berechnen Sie das Spatprodukt $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ folgender drei Vektoren:

$$\vec{a} = (-3\,;\,0\,;\,1)\ ,\qquad \vec{b} = (0\,;\,-2\,;\,1)\ ,\qquad \vec{c} = (1\,;\,2\,;\,3)$$

Aufgabe 13: Gleichseitiges Dreieck

Bestimmen Sie $\sin(\pi/6)$ und $\cos(\pi/6)$ mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks im Einheitskreis. Zeichnen Sie dazu das Dreieck symmetrisch um den Winkel Null in den Kreis ein.

Aufgabe 14: Antares

Einer der größten bekannten Sterne ist Antares im Sternbild Skorpion. Sein Durchmesser wurde zu 1000 Millionen Kilometer (etwa dem 800-fachen Sonnendurchmesser) bestimmt. Er ist 600 Lichtjahre von der Erde entfernt. Berechnen Sie den Winkel in Winkelsekunden, den Antares am Himmel überdeckt. Verwenden Sie dazu die — in diesem Fall sehr gute — Näherung $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ für $|\alpha| \ll 1$ (α im Bogenmaß).

(*Hinweis:* Das Licht legt in der Sekunde $3 \cdot 10^8$ m zurück.)

Aufgabe 15: Quadratische Ergänzung

Bestimmen Sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aufgabe 16: Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die reellen Lösungen (soweit vorhanden) von:

(a) $4x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0$

(b) $2x^2 + 13x - 7 = 0$

(c) $\frac{5}{4}x^2 + 7x + 10 = 0$

(d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = 0$

(e) $\frac{7}{12}x^2 - 21 = 0$

(f) $5x^2 + 35 = 0$

Aufgabe 17: Nochmals: Entfernung einer Gewitterwolke

Wir betrachten nochmals das Problem der römischen Vermessungsingenieurin *Alecto Pippaea Fulmina* aus Aufgabe 8. Sie erkennt, dass die von ihr berechnete Entfernung der Gewitterwolke nicht stimmen kann, weil ein wesentlicher Teil der Wolke hinter dem Horizont liegt. Daher wiederholt sie die Rechnung unter Berücksichtigung der Erdkrümmung. Welche Entfernung erhält sie jetzt?

(*Hinweis:* Sie erhalten eine quadratische Gleichung für die Höhe der Wolke hinter dem Horizont. Nach deren Lösung können Sie die Entfernung analog zu Teilaufgabe 8 (a) berechnen.)

Aufgabe 18: Radioaktives Zerfallsgesetz

Von einem radioaktiven Präparat ist nach 10 Jahren 1/5 der ursprünglichen Menge zerfallen. Wie groß ist die Halbwertszeit $T_{1/2}$ dieses Präparates?

(*Hinweis:* der radioaktive Zerfall folgt einem Exponentialgesetz der Form

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-t/\tau},$$

wobei $N(t)$ die Zahl der zur Zeit t noch vorhandenen Kerne ist. Die Zeitkonstante τ ist **nicht** identisch mit der Halbwertszeit $T_{1/2}$. Nach der Halbwertszeit ist die **Hälfte** der ursprünglichen Menge zerfallen, d. h., die Hälfte ist noch vorhanden. Bestimmen Sie zunächst die Zeitkonstante τ und dann daraus die Halbwertszeit.)