



9. Oktober 2024

Blatt 3: Komplexe Zahlen, Reihendarstellung von Funktionen, Differentialrechnung (Grundlagen)

Aufgabe 19: Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

(a) $(7i) \cdot (-5i)$

(d) $(3 + 2i^2) - (5 + 3i)$

(b) $i \cdot (2 - 3i)$

(e) $(i + 1) \cdot (1 - i)$

(c) $\frac{i^2}{-(i^2)}$

(f) $\frac{i^2}{(-i)^2}$

Aufgabe 20: Quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen

Bestimmen Sie die komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $z^2 - 8z + 26 = 0$

(b) $z^2 + 25 = 0$

(c) $2z^2 + 4z + 14 = 0$

Aufgabe 21: Polarform

Ermitteln Sie die Polarform folgender Zahlen:

(a) $3 + 2i$

(c) $i + \sqrt{3}$

(e) $3 - 4i$

(b) $5 + 3i$

(d) $1 - i$

(f) $i^2 + 3i + 5$

Aufgabe 22: Real- und Imaginärteil

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexwertigen Funktionen, und skizzieren Sie sie in Abhängigkeit der reellen Variablen x :

(a) $f(x) = -\frac{1}{x + i}$

(b) $g(x) = -\frac{i}{x^2} (e^{ix} - ix - 1)$

Aufgabe 23: Nochmals: radioaktives Zerfallsgesetz

Entwickeln Sie das radioaktive Zerfallsgesetz aus Aufgabe 20 bis zur linearen Ordnung in der Zeit t . Zeichnen Sie die Graphen des exakten Zerfallsgesetzes und der linearen Näherung in ein gemeinsames Diagramm. Nach welcher Zeit wird die Näherung Null?

Aufgabe 24: Reihendarstellung

Ermitteln Sie das allgemeine Glied, und schreiben Sie mit Summenzeichen:

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

(b) $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^7} + \dots$

(c) $3 + 5 + \frac{7}{2!} + \frac{9}{3!} + \dots$

Aufgabe 25: Differentiation

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = 2x^9 + x^5 - 8x^4 + 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}$

(b) $f(x) = 2 \cos x + 2 \sin(2x)$

(c) $f(t) = \alpha e^{-\beta t} \sin(\omega t)$

(d) $f(x) = (x^5 - 1)^2$

(e) $f(x) = \tan x$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{7x^2} + \frac{1}{\sqrt{3x}}$

(g) $f(x) = \frac{g(x) \cdot h^2(x)}{k(x)}$

(h) $f(x) = \sin^2 x + (\cos x)^2$

(i) $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^3 + c}{dx^3 + ex^2 + fy}$

(j) $f(x) = \ln(e^x)$

(k) $f(x) = e \ln x$

(l) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

(m) $f(x) = e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$

(n) $f(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$