10. Oktober 2024

Blatt 4: Differentialrechnung (fortgeschrittene Kapitel und Anwendungen), Integralrechnung (Grundlagen)

Aufgabe 26: Differentiation der Umkehrfunktion

Differenzieren Sie die Umkehrfunktion von

$$y = x^2; \quad x > 0$$

Aufgabe 27: Geradlinige Bewegung

Bei einer geradlinigen Bewegung wird die Zeitabhängigkeit des zurückgelegten Weges s beschrieben durch

$$s(t) = k\,t\,e^{-t/t_0}$$

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung.

(b) Was geschieht zur Zeit $t = t_0$?

(*Hinweis:* In der Physik ist die Geschwindigkeit die erste, die Beschleunigung die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit, also $v(t) = \dot{s}(t)$ und $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$.)

Aufgabe 28: Mehrfache Ableitungen

Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 5$

(b) $f(x) = (e^{4x})^2 + \cos x + \frac{3}{4}\left(\ln x + x^2 - x + 4\right)$

Aufgabe 29: Extremwerte einer Funktion

Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte folgender Funktionen, und skizzieren Sie die Funktionen:

(a) $f(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

(b) $f(x) = \cos^2 x$

Aufgabe 30: Summe

Zerlegen Sie die Zahl 240 so in zwei Summanden, dass das Produkt P des einen Summanden mit dem Quadrat des anderen maximal ist.

Aufgabe 31: Laufbahn

Eine 400 m-Laufbahn, bestehend aus zwei parallelen Geraden mit zwei angesetzten Halbkreisen, soll so angelegt werden, dass der Inhalt des Rechtecks zwischen den Geraden maximal wird. Wie lang ist eine Gerade, und welche Fläche hat das Rechteck?

Aufgabe 32: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = a\,x^4\,y^3 + bx\,\sin y + \ln(cy)$$

Bestimmen Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

Was fällt auf?

Aufgabe 33: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x^4 \, dx$

(b) $\int e^{x+3} \, dx$

(c) $\int \tan(x) \, dx$

(d) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

(e) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} \, dx$

(f) $\int \left[1 + \tan^2(x)\right] \, dx$

(g) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3} \, dx$

(h) $\int \cos(x + \pi) \, dx$

(i) $\int \frac{2}{r^2} \, dr$

(j) $\int (r^2 + e^r) \, dr$

(*Hinweis zu (c) und (d):* substituieren! *Hinweis zu (f):* $1 = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$)