10. Oktober 2023

Blatt 2: Rechnen mit Vektoren (2), elementare Funktionen

Aufgabe 13: Kreuzprodukt

Berechnen Sie das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ folgender Vektoren:

(a) $\vec{a} = (1\,;\,3\,;\,6)\ ,\quad \vec{b} = (-6\,;\,-3\,;\,-1)$

(b) $\vec{a} = (5\,;\,0\,;\,1)\ ,\quad \vec{b} = (2\,;\,-7\,;\,3)$

Aufgabe 14: Spatprodukt

Berechnen Sie das Spatprodukt $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ folgender drei Vektoren:

$$\vec{a} = (-3\,;\,0\,;\,1)\ ,\qquad \vec{b} = (0\,;\,-2\,;\,1)\ ,\qquad \vec{c} = (1\,;\,2\,;\,3)$$

Aufgabe 15: Straßenlampe

In der Mitte einer 15 m breiten Straße soll eine Lampe angebracht werden. Diese hängt an zwei Seilen, welche an zwei am Straßenrand stehenden Häusern befestigt sind. Wie schwer darf die Lampe sein, wenn jedes Seil mit 250 N belastet werden darf und die Lampe 1 m unterhalb der Befestigungspunkte an den Hauswänden hängen soll?

(*Tipp:* Skizze!)

Aufgabe 16: Gleichseitiges Dreieck

Bestimmen Sie $\sin(\pi/6)$ und $\cos(\pi/6)$ mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks im Einheitskreis. Zeichnen Sie dazu das Dreieck symmetrisch um den Winkel Null in den Kreis ein.

Aufgabe 17: Antares

Einer der größten bekannten Sterne ist Antares im Sternbild Skorpion. Sein Durchmesser wurde zu 1000 Millionen Kilometer (etwa dem 800-fachen Sonnendurchmesser) bestimmt. Er ist 600 Lichtjahre von der Erde entfernt. Berechnen Sie den Winkel in Winkelsekunden, den Antares am Himmel überdeckt. Verwenden Sie dazu die — in diesem Fall sehr gute — Näherung $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ für $|\alpha| \ll 1$ (α im Bogenmaß).

(*Hinweis:* Das Licht legt in der Sekunde $3 \cdot 10^8$ m zurück.)

Aufgabe 18: Quadratische Ergänzung

Bestimmen Sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aufgabe 19: Lösen von Gleichungen

Bestimmen Sie die reellen Lösungen (soweit vorhanden) von:

(a) $4x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0$

(b) $2x^2 + 13x - 7 = 0$

(c) $\frac{5}{4}x^2 + 7x + 10 = 0$

(d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = 0$

(e) $\frac{7}{12}x^2 - 21 = 0$

(f) $5x^2 + 35 = 0$

Aufgabe 20: Radioaktives Zerfallsgesetz

Von einem radioaktiven Präparat ist nach 10 Jahren 1/5 der ursprünglichen Menge zerfallen. Wie groß ist die Halbwertszeit $T_{1/2}$ dieses Präparates?

(*Hinweis:* der radioaktive Zerfall folgt einem Exponentialgesetz der Form

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-t/\tau},$$

wobei $N(t)$ die Zahl der zur Zeit t noch vorhandenen Kerne ist. Die Zeitkonstante τ ist **nicht** identisch mit der Halbwertszeit $T_{1/2}$. Nach der Halbwertszeit ist die **Hälfte** der ursprünglichen Menge zerfallen, d. h., die Hälfte ist noch vorhanden. Bestimmen Sie zunächst die Zeitkonstante τ und dann daraus die Halbwertszeit.)

Aufgabe 21: x, y ungelöst

Für zwei Unbekannte x und y gelte $x^2 = c\,x + y$ und $y^2 = x + c\,y$ mit einer vorgegebenen Zahl c. Berechnen Sie $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = ?$ unter der Nebenbedingung $x \neq y$.

(*Hinweis:* subtrahieren Sie die beiden Ausgangsgleichungen voneinander.
Quelle: SPIEGEL-Online.)