



13. Oktober 2023

Blatt 5: Integralrechnung (fortgeschrittene Kapitel und Anwendungen)

Aufgabe 37: Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

(a) $\int x \cdot \ln(x) \, dx$

(d) $\int e^x \cdot e^x \, dx$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

(e) $\int e^x \cdot \sin(x) \, dx$

(c) $\int x^2 \cdot \cos(x) \, dx$

(f) $\int x \cdot e^x \, dx$

Aufgabe 38: Integration durch Substitution

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

(a) $\int \frac{3}{x+2} \, dx$

(d) $\int 2 \cos(2x-1) \, dx$

(b) $\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$

(e) $\int \frac{1}{x(\ln x)^a} \, dx$

(c) $\int (a^{x+1} + e^{-bx}) \, dx$

(f) $\int x^2 \exp(x^3-2) \, dx$

(Hinweis: die Ergebnisse der vorherigen Aufgaben und der Vorlesung dürfen verwendet werden.)

Aufgabe 39: Bestimmte Integrale

Bestimmen Sie den Wert folgender bestimmter Integrale:

(a) $\int_0^1 \frac{3x^5}{x^3+4} \, dx$

(c) $\int_0^{\pi/4} 2 \tan^2(x) \, dx$

(b) $\int_1^e \ln(x) \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \, dx$

(Hinweis zu (a): substituieren! Hinweis zu (c): $\tan^2(x) = \tan^2(x) + 1 - 1$)

Aufgabe 40: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{1-x^2} dx$$

(Hinweis: $2 = (1+x) + (1-x)$)

Aufgabe 41: Beschleunigte Bewegung

Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung in x -Richtung. Ein Teilchen befinde sich am Anfang am Koordinatenursprung in Ruhe und erfahre die folgende zeitabhängige Beschleunigung

$$a(t) = \begin{cases} a_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechnen und skizzieren Sie nacheinander die Beschleunigung $a(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und den Ort $x(t)$ des Teilchens im Zeitintervall $0 \leq t \leq T/2$.
- Mit welchen Potenzgesetzen der Zeit starten die Funktionen $a(t)$, $v(t)$ und $x(t)$ für $t \rightarrow 0$?
- Berechnen Sie Geschwindigkeit und Ort des Teilchens zum Zeitpunkt $t = T/2$.

(Hinweis: Die Geschwindigkeit erhält man durch Integration der Beschleunigung, den Ort durch Integration der Geschwindigkeit über die Zeit. Beachten Sie die Integrationsgrenzen!)

Aufgabe 42: Volumenberechnung mittels Integration

Skizzieren Sie die folgenden Körper, und berechnen Sie deren Volumen $V = \int dV$ mittels Integration:

- Zylinder um den Ursprung $(0; 0; 0)$ mit Radius R und Höhe H (Zylinderkoordinaten: $dV = \rho d\rho d\phi dz$)
- gerader Kegel mit Höhe H und Radius R der Grundfläche (verwenden Sie Zylinderkoordinaten; die Kegelspitze liege im Ursprung $(0; 0; 0)$, die Grundfläche bei $z = H$)

Aufgabe 43: Schwerpunkt

Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes $\vec{S} = (1/V) \int \vec{r} dV$ für folgende Körper:

- Zylinder mit Radius R und Höhe H
- gerader Kegel mit Höhe H und Radius R der Grundfläche

(Hinweis: Legen Sie den Koordinatenursprung in die Mitte der Zylinder-Grundfläche bzw. an die Kegelspitze. Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt auf der Figurenachse der Körper liegen. Es genügt also, die z -Komponente S_z seines Ortsvektors \vec{S} zu berechnen.)