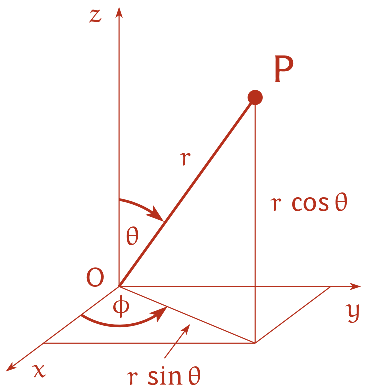
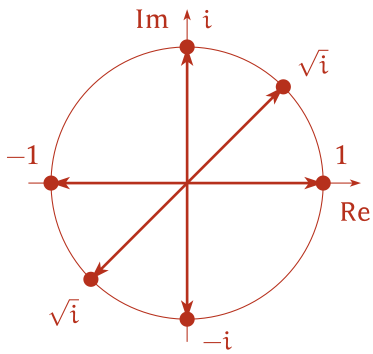
Mathematische Grundlagen zu den Grundvorlesungen der Physik

für Studierende der Physik im Haupt- oder Nebenfach





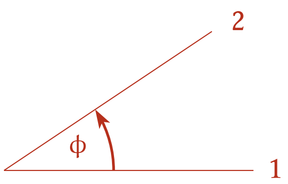
Physikalisches Institut

Wolfgang Kiefer   Lothar Kador

Version 17. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Winkel und Koordinatensysteme

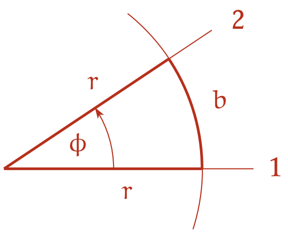


Wir betrachten nur Winkel in der Ebene. Ein **ebener Winkel** kennzeichnet die relative Drehung zweier sich in einem Punkt (→ **Scheitel**) treffenden Halbgeraden (→ **Schenkel**), ist also ein Maß für den **Richtungsunterschied** der Schenkel. Winkel werden meist mit griechischen Buchstaben benannt.

Koordinaten und **Koordinatensysteme** dienen dazu, die Punkte einer Ebene, des dreidimensionalen (3-d) Raumes oder eines höherdimensionalen (n-d) Raumes eindeutig zu kennzeichnen. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, Koordinaten zu definieren. Wir behandeln die wichtigsten.

1.1 Ebene Winkel

1.1.1 Maß für die Größe eines Winkels

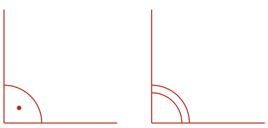


- Zeichne einen Kreis mit Radius r um den Scheitel. Die Schenkel schneiden aus ihm einen Kreisbogen der Länge b heraus. Dann ist die Größe des zugehörigen Winkels ϕ (im Bogenmaß) definiert als

$$\phi = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r} \tag{1.1}$$

- Man unterscheidet:

Vollwinkel:	$\phi = 2\pi$
überstumpfer Winkel:	$\pi < \phi < 2\pi$
gestreckter Winkel:	$\phi = \pi$
stumpfer Winkel:	$\pi/2 < \phi < \pi$
rechter Winkel:	$\phi = \pi/2$
spitzer Winkel:	$0 < \phi < \pi/2$



- Ein rechter Winkel wird häufig durch einen **Punkt** oder einen **doppelten Kreisbogen** gekennzeichnet.

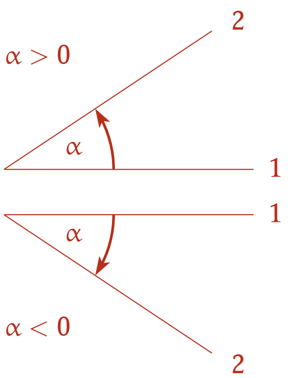
- Einheit des Winkels im Bogenmaß:

$$[\phi] = \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 1\ \text{Radiant (rad)}$$

Daneben: Einteilung in Grad (°), Winkelminuten (′) und Winkelsekunden (″):

$$1° \mathrel{\hat{=}} 60' \mathrel{\hat{=}} 3600''$$

Der Vollwinkel hat eine Größe von 360° bzw. 2π (rad).



- **Drehsinn, Winkelvorzeichen:** eine Drehung **entgegen dem Uhrzeigersinn** hat per Definition **positives** Vorzeichen, eine Drehung **im Uhrzeigersinn negatives**. Diese Vorzeichen gelten auch für den überstrichenen Drehwinkel.

1.1.2 Umrechnung von Winkeleinheiten

- Radiant → Grad, Minuten, Sekunden:

$$\phi = x \text{ rad} = x \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = x \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \tag{1.2}$$

- Grad, Minuten, Sekunden → Radiant:

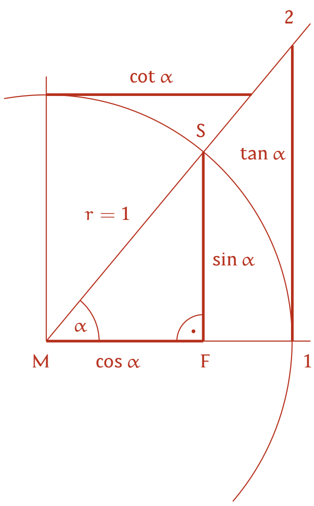
π rad $\widehat{=}$ 180°

$$\psi = y^\circ = y^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = y \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} \tag{1.3}$$

- Beispiele:

$$1 \text{ rad} \mathrel{\widehat{=}} 57{,}2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$$
$$1^\circ \mathrel{\widehat{=}} 1{,}7453 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0{,}017453 \text{ rad} = 17{,}453 \text{ mrad}$$
$$(1 \text{ mrad} = 10^{-3} \text{ rad} \quad [\text{Milliradiant}])$$

1.1.3 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)



- Zeichne einen Kreis mit Radius r um den Scheitelpunkt M. Zwei Halbgeraden 1 und 2 schließen den Winkel α ein. Ziehe vom Schnittpunkt S der Halbgerade 2 mit der Kreislinie das Lot auf die Halbgerade 1 zum Fußpunkt F. Dann ist MFS ein **rechtwinkeliges Dreieck**, dessen Hypotenuse die Länge des Kreisradius r hat. Betrachte außerdem die senkrechte Tangente rechts und die waagerechte Tangente oben an die Kreislinie. Die nebenstehende Zeichnung zeigt speziell die Situation für $r = 1$ ("Einheitskreis").
- Die **trigonometrischen Funktionen** des Winkels α sind wie folgt definiert:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{FS}}{\overline{MS}} \tag{1.4}$$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{MF}}{\overline{MS}} \tag{1.5}$$
$$\tan\alpha = \frac{\overline{FS}}{\overline{MF}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.6}$$
$$\cot\alpha = \frac{\overline{MF}}{\overline{FS}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{1.7}$$

→ Kapitel 3

Mehr zu diesen Funktionen in Kapitel 3.

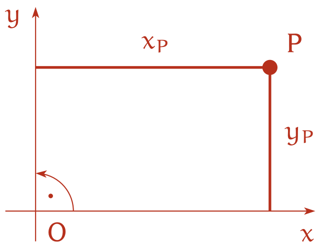
- Wenn z. B. $\tan\alpha$ bekannt ist, wie erhält man den Winkel α? Dies ist möglich mit Hilfe der **Arcus-Funktionen**, der **Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen**. Beispiel:

$$\alpha = \arctan(\tan\alpha) = \arctan\left(\frac{\overline{FS}}{\overline{MF}}\right) \tag{1.8}$$

Sie sind zu allen trigonometrischen Funktionen definiert. Auch hierzu mehr in Kapitel 3.

1.2 Koordinatensysteme in der Ebene

1.2.1 Kartesische Koordinaten



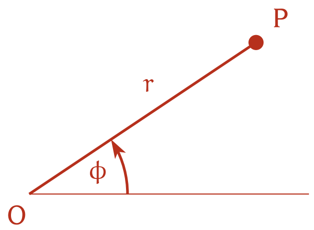
- Ein Punkt in der Ebene wird als **Koordinaten-Ursprung** (O) definiert. Lege durch diesen Punkt zwei zueinander senkrechte Geraden, die **Koordinaten-Achsen**. Dann kann jeder Punkt der Ebene durch seine kleinsten Abstände (mit Vorzeichen!) zu den Achsen, die **kartesischen Koordinaten**, eindeutig gekennzeichnet werden:

$$P = (x_P; y_P) \tag{1.9}$$

- Die x-Achse wird manchmal auch als 1-Achse oder **Abszisse** bezeichnet, die y-Achse als 2-Achse oder **Ordinate**.
- Der Winkel von der positiven x- oder 1-Achse zur positiven y- oder 2-Achse ist stets **positiv**.

1.2.2 Polarkoordinaten

- Hier handelt es sich um ein "krummliniges" Koordinatensystem.
- Definiere einen Punkt als **Koordinatenursprung** und **eine Bezugsrichtung**. Diese fällt üblicherweise mit der x-Achse (bzw. 1-Achse) eines kartesischen Koordinatensystemes zusammen.

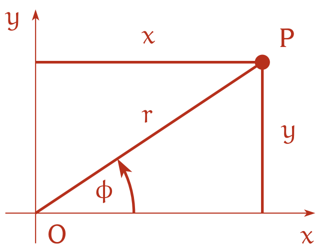


- Die Lage eines Punktes P wird durch seinen **Abstand vom Ursprung** und den **Winkel** zwischen der Verbindungsgeraden $\overline{OP}$ und der Bezugsrichtung beschrieben:

$$P = (r; \phi) \tag{1.10}$$

- Die **Koordinatentransformation** ist mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen und elementarer Geometrie leicht möglich. (Der Index "P" der kartesischen Koordinaten wird im Folgenden weggelassen.)

$$P = (x; y) = (r; \phi) \tag{1.11}$$



also

$$x = r \cos\phi \tag{1.12}$$
$$y = r \sin\phi \tag{1.13}$$

und andererseits[1]

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(nach Pythagoras)} \tag{1.14}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{bzw.} \quad \tan\phi = \frac{y}{x} \tag{1.15}$$

[1] Bei dieser und den folgenden Transformationsgleichungen für Winkelkoordinaten ist im 2. und 3. Quadranten zum Wert der arctan-Funktion π zu addieren, also $\phi = \arctan(y/x) + \pi$.

1.3 Koordinatensysteme im dreidimensionalen Raum

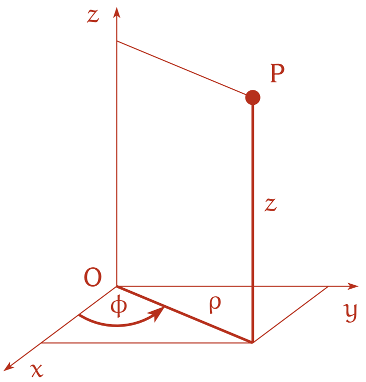
1.3.1 Kartesische Koordinaten

Rechte-Hand-Regel

Senkrecht zur $x\,y$-Ebene wird eine dritte Koordinatenachse (z-Achse, 3-Achse) hinzugefügt, so dass x-, y- und z-Achse ein **Rechtssystem** bilden, d. h. durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der **rechten** Hand (in dieser Reihenfolge!) repräsentiert werden. Die **kartesischen Koordinaten** eines Punktes im dreidimensionalen Raum sind dann seine senkrechten Abstände (wieder mit Vorzeichen!) von den Ebenen, die jeweils von zwei Achsen aufgespannt werden:

x-Koordinate:	Abstand von der $y\,z$-Ebene
y-Koordinate:	Abstand von der $z\,x$-Ebene
z-Koordinate:	Abstand von der $x\,y$-Ebene

1.3.2 Zylinderkoordinaten



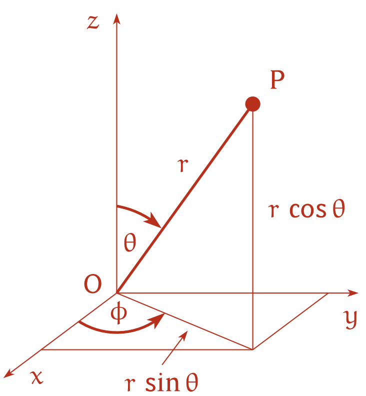
- Ausgehend von einem ebenen Polarkoordinaten-System, wird senkrecht zur $\rho\,\phi$-Ebene die z-Achse durch den Ursprung hinzugefügt. Jeder Punkt im 3-d Raum kann dann durch **zwei Längenkoordinaten** (ρ und z) und **eine Winkelkoordinate** (ϕ) eindeutig beschrieben werden.
- Der Abstand vom Ursprung in der $x\,y$-Ebene wird meist mit ρ (nicht r) bezeichnet, um Verwechslungen mit den Kugelkoordinaten (s. u.) auszuschließen.
- Alle Punkte mit $\rho = \text{const.}$ liegen auf der **Mantelfläche eines Zylinders**.
- Koordinatentransformation:

$$x = \rho \cos\phi \tag{1.16}$$
$$y = \rho \sin\phi \tag{1.17}$$
$$z = z \tag{1.18}$$

und umgekehrt

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.19}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{bzw.} \quad \tan\phi = \frac{y}{x} \tag{1.20}$$
$$z = z \tag{1.21}$$

1.3.3 Kugelkoordinaten (sphärische Koordinaten)



- Die Lage eines Punktes P wird hier durch seinen **Abstand r vom Ursprung** und **zwei Winkel** gekennzeichnet:
- θ ist der Winkel zwischen der Verbindungslinie $\overline{OP}$ und der positiven z-Achse.
- ϕ ist der Winkel zwischen der Projektion von $\overline{OP}$ in die $x\,y$-Ebene und der positiven x-Achse. Die Projektion entspricht der Größe ρ in Zylinderkoordinaten; sie hat die Länge $r\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}$. Folglich hat der Winkel ϕ die gleiche Bedeutung wie dort.
- θ variiert zwischen 0 und π, ϕ zwischen 0 und 2π. θ ist der **Polarwinkel**, ϕ der **Azimutwinkel**.

- Alle Punkte mit $r = \text{const.}$ liegen auf einer **Kugeloberfläche**. Die xy-Ebene ist die Äquatorebene der Kugel, der Punkt $\theta = 0$ (d. h. $x = y = 0$; $z = r$) ihr Nordpol und $\theta = \pi$ ($x = y = 0$; $z = -r$) ihr Südpol. Der Azimutwinkel ϕ entspricht dem Längengrad auf der Erdoberfläche, $\pi/2 - \theta$ dem Breitengrad.
- Koordinatentransformation:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{1.22}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{1.23}$$

$$z = r \cos\theta \tag{1.24}$$

und umgekehrt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.25}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \text{bzw.} \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \tag{1.26}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \qquad \text{bzw.} \quad \tan\phi = \frac{y}{x} \tag{1.27}$$

2 Rechnen mit Vektoren

Einige physikalische Größen werden allein durch ihren **Betrag** nicht vollständig charakterisiert; es ist zusätzlich noch die Angabe einer **Richtung** notwendig. Diese Größen werden als **Vektoren** bezeichnet; Beispiele sind die Geschwindigkeit, die Kraft oder der Impuls. Viele physikalische Gesetze lassen sich einfacher und verständlicher formulieren, wenn man sich der Vektorrechnung bedient.

2.1 Skalare und Vektoren

- **Skalar:** ungerichtete Größe, beschrieben durch **Zahlenwert** · **Einheit**. Beispiele:

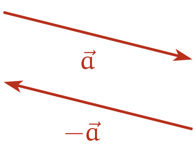
Zeit	$t = 10$ s
Masse	$m = 50$ kg
Volumen	$V = 120$ m^3
Temperatur	$T = 298$ K

$\xrightarrow{\vec{v}}$ $\xrightarrow{\mathbf{v}}$

- **Vektor:** gerichtete Größe, vollständig beschrieben erst durch **Betrag und Richtung**, also **Zahlenwert** · **Einheit plus Richtungsangabe**. Der Name "Vektor" stammt aus der Astronomie: er bezeichnet die fiktive gerade Linie, die von der Sonne zu einem Planeten, d. h. von einem der Brennpunkte der ellipsenförmigen Planetenbahn zu einem Bahnpunkt, gezogen wird. Beispiel: Geschwindigkeit: $\vec{v} = 20$ m/s mit zusätzlicher Angabe der Richtung, in welcher sich ein Massenpunkt bewegt. Weitere Beispiele für Vektoren: Impuls $\vec{p}$, Beschleunigung $\vec{a}$, Drehimpuls $\vec{L}$, elektrische und magnetische Feldstärke ($\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$). Schreibweise (z. B. für einen Geschwindigkeitsvektor): $\xrightarrow{\vec{v}}$, in Büchern häufig Fettdruck: $\xrightarrow{\mathbf{v}}$.

- **Betrag** eines Vektors: $|\vec{v}| = v$. Der Betrag eines Vektors (seine "Länge") ist ein Skalar.

- **Nullvektor:** der Vektor mit dem Betrag Null ist der Nullvektor. Seine Richtung ist unbestimmt. Schreibweise: $\vec{0}$.



- **Negativer Vektor:** der zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ negative Vektor $-\vec{a}$ hat den gleichen Betrag wie $\vec{a}$, aber die **entgegengesetzte Richtung**.

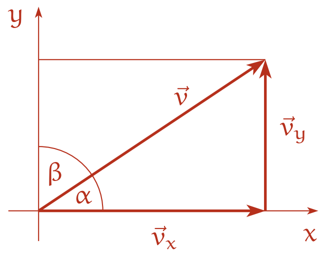
- **Einheitsvektor:** $\vec{v}/|\vec{v}| = \vec{e}_v = \hat{e}_v$. Vektor in Richtung von $\vec{v}$ mit Betrag Eins. Einheitsvektoren werden häufig durch ein Dach (^) anstelle eines Vektorpfeiles gekennzeichnet. Damit:

$$|\hat{e}_v| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1 \tag{2.1}$$

$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{e}_v$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{e}_v = v \cdot \hat{e}_v \tag{2.2}$$

(v: Zahlenwert mit Einheit, $\hat{e}_v$: Richtung).



- **Komponentenzerlegung eines Vektors:** betrachte als Beispiel in zwei Dimensionen die Zerlegung in zwei Vektoren parallel zu den Koordinatenachsen:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = |\vec{v}_x| \cdot \hat{e}_x + |\vec{v}_y| \cdot \hat{e}_y = v_x \cdot \hat{e}_x + v_y \cdot \hat{e}_y \tag{2.3}$$

in drei Dimensionen:

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{e}_x + v_y \cdot \hat{e}_y + v_z \cdot \hat{e}_z \tag{2.4}$$

v_x, v_y, v_z: Komponenten des Vektors; $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$: Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen.

- **Parallelverschiebung:** Vektorpfeile kann man beliebig parallel verschieben. Dies ändert den Vektor nicht!

- **Komponentenschreibweise:** mit

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

kann ein allgemeiner Vektor $\vec{v}$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \cdot \hat{e}_x + v_y \cdot \hat{e}_y + v_z \cdot \hat{e}_z \\ &= v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.6}$$

- **Betrag eines Vektors:** für das zweidimensionale Beispiel gilt

$$|\vec{v}_x| = v_x = v \cdot \cos\alpha \tag{2.7}$$
$$|\vec{v}_y| = v_y = v \cdot \cos\beta = v \cdot \sin\alpha \tag{2.8}$$

und damit nach Pythagoras

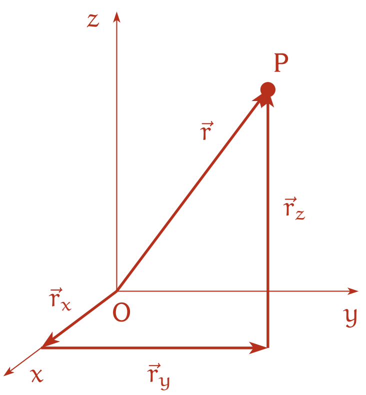
$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 \cdot \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = v^2 \tag{2.9}$$

also

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{2.10}$$

In drei Dimensionen entsprechend:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.11}$$



- **Ortsvektor:** zur Festlegung der Lage eines Punktes P im Raum definiert man einen Vektor vom Bezugspunkt (dem Ursprung O des Koordinatensystemes) zu diesem Punkt:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \\ &= x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

mit

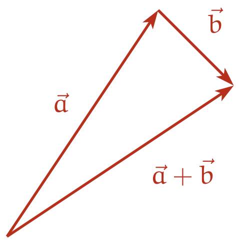
$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.13}$$

Beispiel:

$$\vec{r} = 2\text{ cm} \cdot \hat{e}_x - 3\text{ cm} \cdot \hat{e}_y + 1\text{ cm} \cdot \hat{e}_z$$
$$r = \sqrt{14}\text{ cm} \approx 3{,}74\text{ cm}$$

2.2 Rechenregeln für Vektoren

2.2.1 Vektoraddition



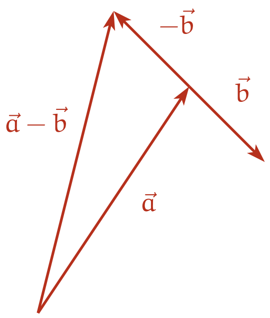
Zeichne vom Endpunkt eines Vektors $\vec{a}$ einen zweiten Vektor $\vec{b}$. Dann ist der **Summenvektor** $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ der Vektor, der den Anfangspunkt von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt von $\vec{b}$ verbindet. Bei mehr als zwei Vektoren geht es analog.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2.14}$$

mit

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

2.2.2 Vektorsubtraktion



Die Subtraktion eines Vektors $\vec{b}$ bedeutet die **Addition des negativen Vektors** $-\vec{b}$.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \tag{2.16}$$

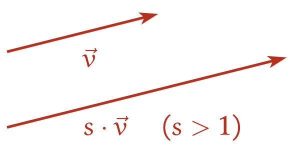
mit

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar



Es sei $\vec{v}$ ein Vektor und s ein Skalar. Dann hat der Vektor $s \cdot \vec{v}$ den $|s|$-fachen Betrag von $\vec{v}$. Er zeigt in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ für $s > 0$ und in die entgegengesetzte Richtung für $s < 0$.

$$s \cdot \vec{v} = s \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot v_x \\ s \cdot v_y \\ s \cdot v_z \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Es gilt das **Distributivgesetz**:

$$s \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = s \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \tag{2.19}$$
$$(s + t) \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{v} \tag{2.20}$$

2.2.4 Skalarprodukt (Punktprodukt, inneres Produkt)

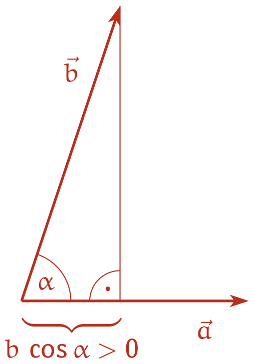
- **Definition:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b\, \cos\alpha \tag{2.21}$$

wobei α der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Beachte: mit dieser Formel können Winkel berechnet werden!

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\, b}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\, b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a\, b}} \tag{2.22}$$



- Es gelten folgende Rechenregeln:
  Kommutativgesetz:

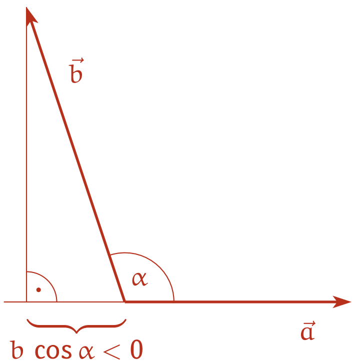
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{2.23}$$

Distributivgesetz:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{2.24}$$

- Falls zwei Vektoren ($\neq \vec{0}$) **senkrecht aufeinander** stehen, ist ihr Skalarprodukt **Null**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \tag{2.25}$$

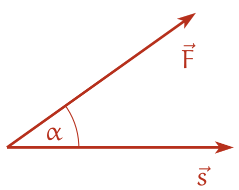


- **Geometrische Interpretation:** Produkt aus dem Betrag des einen Vektors mit der Projektion des zweiten auf die Richtung des ersten. Beachte: die "Projektion" kann hier positiv oder negativ sein, je nachdem, ob $\alpha < 90°$ oder $\alpha > 90°$ ist.

- Zahlenbeispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \hookrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}; \qquad \text{d. h.}\ \ \alpha = 35{,}26°$$



- Anwendungsbeispiel: eine Kraft $\vec{F}$ greift an einem Körper an, wobei dieser sich entlang des Weges $\vec{s}$ bewegt. Dann ist die von der Kraft am Körper verrichtetete **Arbeit**

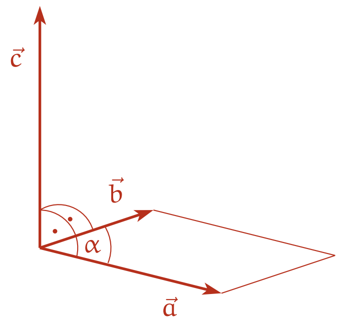
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Falls $\vec{F}$ und $\vec{s}$ **senkrecht aufeinander** stehen, ist die Arbeit Null.

2.2.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

- **Definition:** Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und dessen Betrag gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes ist:

$$|\vec{c}| = c = a\, b\, \sin\alpha. \tag{2.26}$$



$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ (in dieser Reihenfolge!) bilden ein **Rechtssystem**, d. h. man kann sie durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger (ebenfalls in dieser Reihenfolge!) der **rechten** Hand darstellen.
- Es gilt das **Distributivgesetz**:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \tag{2.27}$$

- Das **Kommutativgesetz** gilt hier **nicht**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{2.28}$$

Grund: der Winkel α (und damit auch sein Sinus-Wert) kehrt beim Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das Vorzeichen um.

- Falls zwei Vektoren ($\neq \vec{0}$) **parallel oder antiparallel** zueinander sind, ist ihr Vektorprodukt **Null**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}. \tag{2.29}$$

Folglich ist das Vektorprodukt jedes Vektors mit sich selbst Null:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}. \tag{2.30}$$

- Berechnung der Komponenten des Vektorproduktes:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{2.31}$$

mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.32}$$

- Das gleiche Ergebnis erhält man durch Berechnung der folgenden dreidimensionalen Determinante:

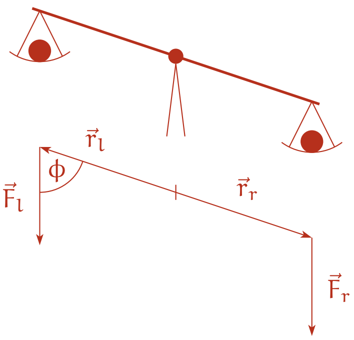
$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

wobei die Summe der “Linksdiagonalprodukte” von der Summe der “Rechtsdiagonalprodukte” subtrahiert wird.

- Zahlenbeispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -3-8 \\ -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -14 \end{pmatrix}$$



- Anwendungsbeispiel: wenn eine Kraft $\vec{F}$ an einem Hebelarm $\vec{r}$ angreift (z. B. die Gewichtskraft an einem Waagebalken), übt sie ein **Drehmoment**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

aus. Beachte: der Vektor des Drehmomentes ist **entlang der Drehachse** gerichtet. Eine Balkenwaage ist dann im Gleichgewicht, wenn das links- und das rechtsdrehende Drehmoment ($\vec{M}_l$ bzw. $\vec{M}_r$) betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet sind:

$$\begin{aligned} \left|\vec{M}_l\right| &= \left|\vec{M}_r\right| \\ r_l\, F_l\, \sin\phi &= r_r\, F_r\, \sin(\pi - \phi) = r_r\, F_r\, \sin\phi \\ r_l\, F_l &= r_r\, F_r \end{aligned}$$

Da der Winkel ϕ zwischen Hebelarm und Schwerkraft auf beiden Seiten gleich ist, liegt das Gleichgewicht für **jede Orientierung** des Waagebalkens vor.

2.3 Abschließende Bemerkungen

Keine Divis. durch Vektor!

- Die **Division** durch einen Vektor ist **nicht erlaubt!**

Vektorprodukt nur in 3-d

- Alle Rechenoperationen mit Vektoren **mit Ausnahme des Vektorproduktes** sind auf andere Raumdimensionen (2-d, 4-d, 5-d, etc.) übertragbar. **Das Vektorprodukt ist nur in drei Dimensionen definiert.**

3 Elementare Funktionen, komplexe Zahlen, Potenzreihenentwicklung von Funktionen

3.1 Funktionsbegriff

Unabhängige Variable(n) und Funktionswert

Unter einer Funktion $f: x \to f(x) = y$ verstehen wir eine **eindeutige Zuordnung** einer abhängigen Variablen y zu einer unabhängigen Variablen x durch eine Rechenvorschrift. Verallgemeinert:

Eindeutigkeit!

Eine Größe y ist eine Funktion einer (oder mehrerer) Variablen x (bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_N$), wenn jedem beliebigen Wert von x (bzw. jeder Kombination $x_1, x_2, \ldots, x_N$) <u>ein</u> bestimmter Wert von y zugeordnet werden kann.

Anmerkung: Mit welchen Symbolen die unabhängige und die abhängige Variable bezeichnet werden, ist willkürlich. Häufig, aber keineswegs immer werden x und y verwendet. Auch das formale Symbol f für die Funktion kann anders lauten. Oft verwendet man hierfür die abhängige Variable: $y = y(x)$.

Beispiele:

1. Umfang u eines Kreises als Funktion des Radius r:

   $$u = u(r) = 2\pi r$$

   allgemein:

   $$y = f(x)$$

2. Umrechnung der Temperatur von Grad Celsius (C) in Grad Fahrenheit (F):

   $$F = F(C) = 32 + \frac{9}{5}C$$

   allgemein:

   $$y = f(x)$$

3. Druck p einer abgeschlossenen Gasmenge von 1 mol als Funktion des zur Verfügung stehenden Volumens V und der absoluten Temperatur T nach dem universellen Gasgesetz:

   $$p = p(V, T) = R\frac{T}{V}$$

   allgemein:

   $$y = f(x_1, x_2)$$

   R ist die allgemeine Gaskonstante, eine Naturkonstante, also keine Variable $[R = 8{,}3143\ \mathrm{J/(K \cdot mol)}]$.

4. Volumenstrom einer Flüssigkeit durch eine dünne Kapillare gemäß dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz (dieses gilt für laminare, d. h. nicht turbulente Strömungen):

$$V = V(\Delta p, l, r, t) = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{l} r^4 t$$

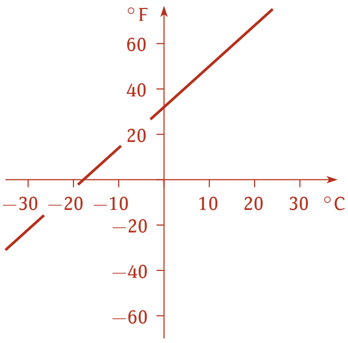
allgemein:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Darin ist η die Viskosität oder Zähigkeit der Flüssigkeit (hier als Konstante angesehen), Δp die Druckdifferenz zwischen den Enden der Röhre, l und r die Länge bzw. der Radius der Röhre und t die Zeit.

3.2 Darstellung einer Funktion

3.2.1 Tabellendarstellung



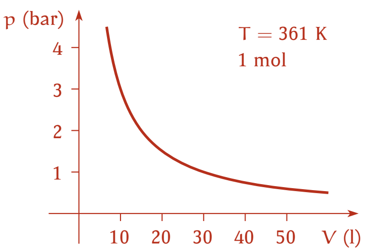
Das Ergebnis jedes **Experimentes** ist eine Tabelle (heute meist in Form einer zwei- oder mehrspaltigen Datei im Messrechner). Beispiele:

1. Temperaturumrechnung von °C in °F

$$F = F(C) = 32 + \frac{9}{5}C$$

Variable C (°C)	5	10	15	20	25	30	35
Funktionswert F (°F)	41	50	59	68	77	86	95

	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35
	32	23	14	5	−4	−13	−22	−31



2. Druck einer abgeschlossenen Gasmenge von 1 mol als Funktion des Volumens bei isothermen Verhältnissen (d. h. für $T =$ const.; hier speziell $T = 361$ K). Für $T =$ const. geht die allgemeine Gasgleichung in das **Gesetz von Boyle-Mariotte** über:

$$p = p(V) = R\frac{T}{V}$$

Variable V (l)	6	7,5	10	15	30	60	300
Funktionswert p (bar)	5	4	3	2	1	0,5	0,1

Parameter

Anmerkung: unabhängige Variablen, die in einer Funktion konstant gesetzt werden (wie hier die Temperatur), nennt man **Parameter**. Für verschiedene Werte der Parameter besteht der Funktionsgraph (s. u.) aus einer **Kurvenschar**.

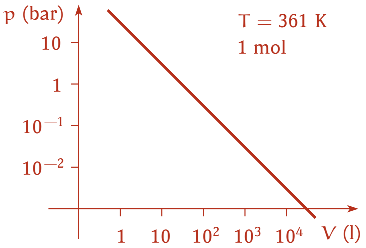
- **Vorteil** der Tabellendarstellung: praktischer Gebrauch; Funktionswerte sind ohne Rechnung sofort ablesbar
- **Nachteil**: für Zwischenwerte **Interpolation** erforderlich.

3.2.2 Graphische Darstellung

Hierbei trägt man die abhängige Variable gegenüber der unabhängigen auf und erhält den zugehörigen **Funktionsgraphen** oder die **Bildkurve** der Funktion; Beispiele siehe oben. Der Graph einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen ist eine **Fläche in einem dreidimensionalen Diagramm**. Vorteile der graphischen Darstellung:

- kontinuierlicher Verlauf; anschaulich
- keine Interpolation notwendig.

Logarithmische Auftragung



Wenn die unabhängige Variable und / oder der Funktionswert über mehrere Größenordnungen variieren, ist eine **halb- oder doppellogarithmische Auftragung** oft günstiger als eine lineare. Dabei unterteilt man entweder eine (→ halblogarithmische Auftragung) oder beide Koordinatenachsen (→ doppellogarithmische Auftragung) nicht linear, sondern logarithmisch, d. h. Potenzen von 10 werden jeweils in gleichem Abstand auf der Achse positioniert. Der Vorteil ist, dass die zugehörige(n) Variable(n) mit **konstanter relativer Genauigkeit** dargestellt werden können. Das nebenstehende Beispiel zeigt den isothermen Zusammenhang $p = p(V) = RT/V$ für $T = 361$ K in doppellogarithmischer Auftragung. Für ein Potenzgesetz wie $p \sim 1/V = V^{-1}$ ergibt sich stets eine Gerade, deren Steigung gleich dem Exponenten des Potenzgesetzes ist (hier -1).

3.2.3 Analytische Darstellung

Diese liegt vor, wenn die Variable und der Funktionswert durch eine **Gleichung**, d. h. durch **Rechenoperationen** miteinander verknüpft sind. Beispiele:

$y = a + x$	Addition
$y = b\,x$	Multiplikation
$y = x^2$	Quadrierung
$y = \sqrt{x}$	Quadratwurzel
$y = a^x$	Exponentialunktion mit beliebiger Basis $a > 0$
$y = e^x = \exp(x)$	Expon.-Funktion mit Basis $e = 2{,}71828182\ldots$ (Eulersche Zahl; siehe später)
$y = \log_a x$	Logarithmus zu beliebiger Basis $a > 0$
$y = \lg x$	dekadischer Logarithmus (Basis 10)
$y = \ln x$	natürlicher Logarithmus (Basis e)
$y = \sin x$ etc.	Sinus (u. andere trigonometrische Funktionen)
$y = \arcsin x$ etc.	Arcussinus (und andere Arcus-Funktionen)

Meist enthalten analytische Funktionsgleichungen Kombinationen aus mehreren elementaren Funktionen, z. B.

$$
\begin{aligned}
y &= a\,\sin(bx)\,\exp(-cx) + d \\
y &= \frac{\sin x}{x} + x^3
\end{aligned}
$$

Die analytische Darstellung einer Funktion ist das Ergebnis einer **Theorie**.

3.2.4 Symbolische Darstellung

Die symbolische Schreibweise wird verwendet, wenn man einen funktionalen Zusammenhang zwischen zwei Größen nicht explizit angeben kann oder will (z. B. weil der analytische Ausdruck nicht bekannt oder sehr kompliziert ist). Sie wurde oben bereits verwendet:

$y = f(x)$

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
y &= y(x) \\
p &= p(V) \\
F &= F(x)
\end{aligned}
$$

oder bei mehreren Variablen

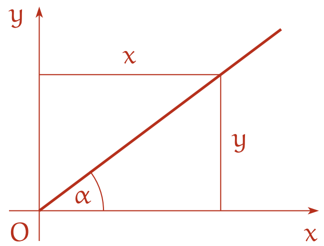
$$p = p(V,T)$$
$$y = y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$g = g(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

3.3 Einige elementare Funktionen

3.3.1 Lineare Funktion

1. Spezialfall

$$y = ax \qquad \text{mit } a = \text{const.} \tag{3.1}$$



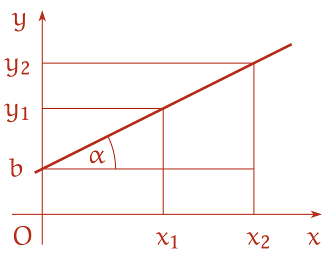
y ist proportional zu x. Dabei ist a der Proportionalitätsfaktor; er ist gleich der **Steigung der zugehörigen Geraden**:

$$a = \frac{y}{x} = \tan\alpha \tag{3.2}$$

Die Steigung der Geraden ist **konstant**, d. h. sie ist für alle Wertepaare x und y gleich. Für diesen Spezialfall geht die Gerade durch den **Ursprung**.

2. Allgemeiner Fall

$$y = ax + b \qquad \text{mit } a,b = \text{const.} \tag{3.3}$$



Hier ist

$$a = \frac{y-b}{x} = \tan\alpha \qquad \text{bzw.} \tag{3.4}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha \tag{3.5}$$

für alle Wertepaare (x_1,y_1), (x_2,y_2).

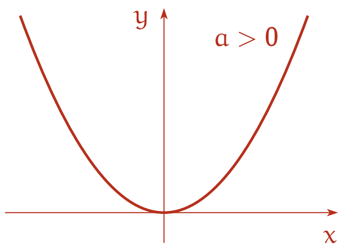
Beachte:

$a > 0$	Gerade steigt
$a = 0$	Gerade verläuft waagerecht
$a < 0$	Gerade fällt.

3.3.2 Quadratfunktion; Parabel

1. Spezialfall

$$y = ax^2 \qquad \text{mit } a = \text{const.} \tag{3.6}$$



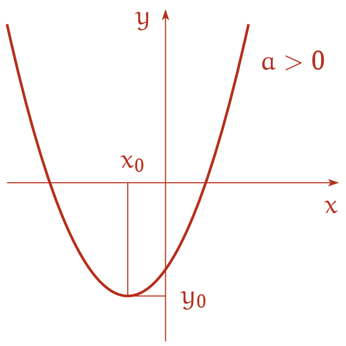
beschreibt eine **Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung**. Der Vorfaktor a bestimmt ihre Steilheit.

2. Allgemeiner Fall

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{mit } a,b,c = \text{const.} \tag{3.7}$$

Diese Funktion kann durch **quadratische Ergänzung** stets auf die Form

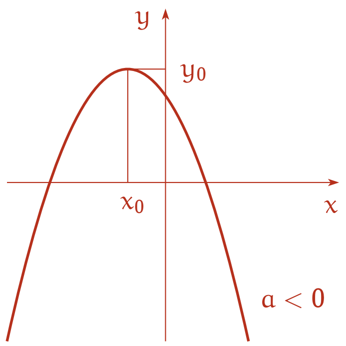
$$y - y_0 = a\,(x - x_0)^2 \tag{3.8}$$



gebracht werden, wobei

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \qquad y_0 = c - \frac{b^2}{4a} \tag{3.9}$$

gilt. Diese Funktion beschreibt also eine **Parabel mit Scheitelpunkt bei** $(\boldsymbol{x_0; y_0})$.



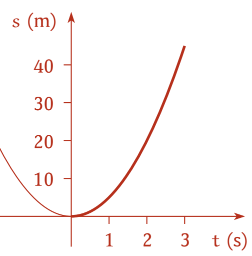
Beachte:

$a > 0$	Parabel ist nach oben geöffnet
$a = 0$	Funktionsgraph ist eine Gerade
$a < 0$	Parabel ist nach unten geöffnet

3. Beispiel: **freier Fall**

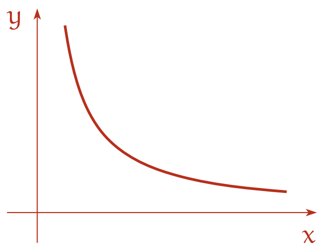
   Der freie Fall eines Körpers unter dem Einfluss der Schwerkraft (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) wird beschrieben durch

   $$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$



   wobei $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung (Schwerebeschleunigung) ist. Wenn die Zeit t nach dem Loslassen des Körpers in Sekunden eingesetzt wird, ergibt sich die zugehörige Fallstrecke $s(t)$ in Metern. Der obige Ausdruck lässt sich auch für negative Zeiten berechnen; physikalisch sinnvoll ist jedoch hier nur der Bereich $t \geqslant 0$. **Beim Auswerten mathematischer Formeln sollte man daher stets ihre physikalische Bedeutung im Auge behalten!**

3.3.3 Hyperbel



Eine Hyperbel wird beschrieben durch die Gleichung

$$y = \frac{a}{x} = a x^{-1} \tag{3.10}$$

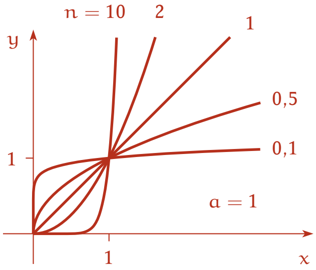
y ist **umgekehrt proportional** zu x. Ein Beispiel ist das oben erwähnte isotherme Gasgesetz nach Boyle-Mariotte

$$p(V) = R\,\frac{T}{V}$$

3.3.4 Allgemeine Potenzfunktion

Die bisher behandelten Funktionen

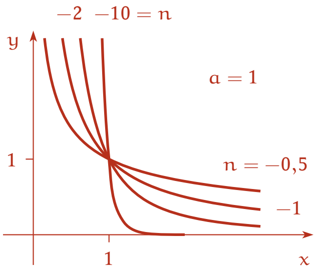
$$y = ax$$
$$y = ax^2$$
$$y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$$



sind Spezialfälle der allgemeinen Potenzfunktion

$$y = ax^n \tag{3.11}$$

wobei a und n beliebige Konstanten sind.

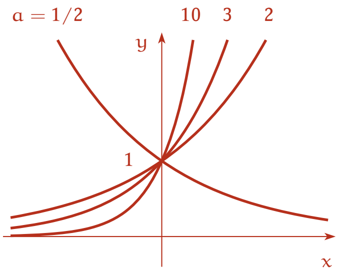


Für negative Exponenten gilt

$$ax^{-n} = \frac{a}{x^n} \tag{3.12}$$

Die nebenstehenden Funktionsgraphen gehören zum Vorfaktor $a = 1$. Sie laufen alle durch den Punkt $(1; 1)$.

3.3.5 Exponentialfunktion



Bei einer Exponentialfunktion steht die Variable x im Exponenten einer beliebigen **positiven** Zahl, der **Basis** a

$$y = a^x \qquad \text{mit} \quad a > 0 \tag{3.13}$$

Mit negativem Vorzeichen im Exponenten erhält man

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \tag{3.14}$$

d. h. Ersetzen der Basis durch ihren Kehrwert führt dazu, dass der Funktionsgraph an der y-Achse gespiegelt wird.

- Rechenregeln für Exponentialfunktionen:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{(x_1+x_2)} \tag{3.15}$$
$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{(x_1-x_2)} \tag{3.16}$$
$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{(x_1 \cdot x_2)} \tag{3.17}$$
$$a^0 = 1 \tag{3.18}$$
$$a^1 = a \tag{3.19}$$

Konsequenz: alle Funktionsgraphen laufen durch den Punkt $(0; 1)$.

- Eine besondere Bedeutung hat die Exponentialfunktion, deren Basis die **Eulersche Zahl** e ist

Euler-Zahl $e = 2{,}71828\ldots$

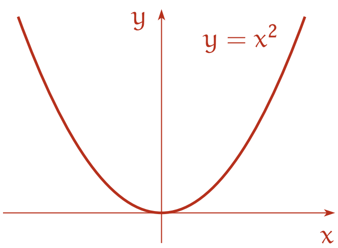
$$y = e^x = \exp(x) \qquad \text{mit}$$
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182846\ldots \tag{3.20}$$

Die Gründe werden in den Kapiteln 4, 5 und 6 klar.

3.3.6 Inverse Funktion (Umkehrfunktion)

- Wir betrachten eine beliebige Funktion $y = f(x)$, d. h. x ist die unabhängige Variable. Frage: Kann man auch x als Funktion von y angeben, und wie ist der entsprechende funktionale Zusammenhang?
- Löse also nach x auf:

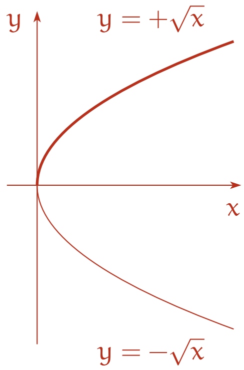
$$x = F(y) \tag{3.21}$$



- Da die Bezeichnungen der Variablen unwichtig sind, vertauscht man in Gl. (3.21) x und y, so dass die unabhängige Variable wieder x heißt:

$$y = F(x) \tag{3.22}$$

F wird dann die **inverse Funktion** oder **Umkehrfunktion** von f genannt.



- Beachte jedoch: Beim Berechnen der Umkehrfunktion ist sicherzustellen, dass die Zuordnung $F: x \to F(x)$ **eindeutig** ist, wie es die Definition einer Funktion verlangt. Im Fall einer Mehrdeutigkeit müssen Teile des Wertebereiches ausgeschlossen werden.
- Beispiel:

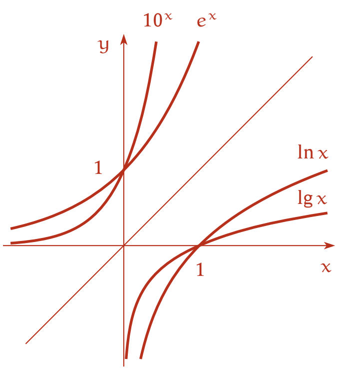
$$y = f(x) = x^2$$

Zu jedem x gibt es einen y-Wert, aber zu jedem y zwei x-Werte, nämlich $x_1 = +\sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$. Man muss sich also nach dem Vertauschen von x und y auf **einen Ast der liegenden Parabel** beschränken. Üblicherweise wird der **positive** Ast gewählt.

- Die Funktionsgraphen der ursprünglichen Funktion f und ihrer Umkehrfunktion F gehen durch **Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten** auseinander hervor.
- Weitere Beispiele:

ursprüngl. Funktion	$y = ax + b$	$y = x^n$	$y = a^x$
Umkehrfunktion	$y = (x - b)/a$	$y = \sqrt[n]{x}$	$y = \log_a x$

3.3.7 Logarithmus



Die Logarithmus-Funktion $F(x) = \log_a x$ ist die **Umkehrfunktion der Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ mit der Basis $a > 0$. Folglich ist der Logarithmus $\log_a x$ der **Exponent, in den man a erheben muss, um x zu erhalten**. Eine wichtige Rolle spielen insbesondere der Logarithmus zur Basis 10

$$y = \log_{10} x = \lg x \qquad \text{(dekadischer Logarithmus)} \tag{3.23}$$

und der Logarithmus zur Basis e

$$y = \log_e x = \ln x \qquad \text{(natürlicher Logarithmus)} \tag{3.24}$$

Die besondere Bedeutung des natürlichen Logarithmus $y = \ln x$ wird ebenfalls in den Kapiteln 4, 5 und 6 klar.

- Einige Rechenbeispiele zum dekadischen Logarithmus $\lg x$:

$$\begin{aligned} 10^{-1} &= 0{,}1 &&\leftrightarrow&& -1 = \lg 0{,}1 \\ 10^{0} &= 1 &&\leftrightarrow&& 0 = \lg 1 \\ 10^{1} &= 10 &&\leftrightarrow&& 1 = \lg 10 \\ 10^{2} &= 100 &&\leftrightarrow&& 2 = \lg 100 \\ 10^{0,5} &= 3{,}1623 &&\leftrightarrow&& 0{,}5 = \lg 3{,}1623 \\ 10^{1,5} &= 31{,}623 &&\leftrightarrow&& 1{,}5 = \lg 31{,}623 \end{aligned}$$

- Allgemeine Rechenregeln für Logarithmen (zu jeder Basis a):

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{3.25}$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{3.26}$$

$$\log_a\left(x_1^{x_2}\right) = x_2 \cdot \log_a x_1 \tag{3.27}$$

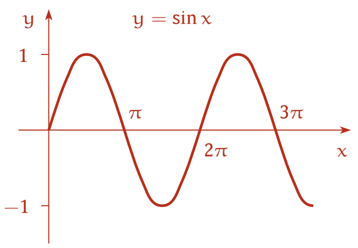
$$\log_a 1 = 0 \tag{3.28}$$

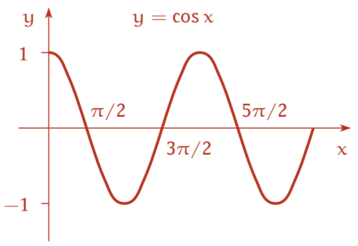
$$\log_a a = 1 \tag{3.29}$$

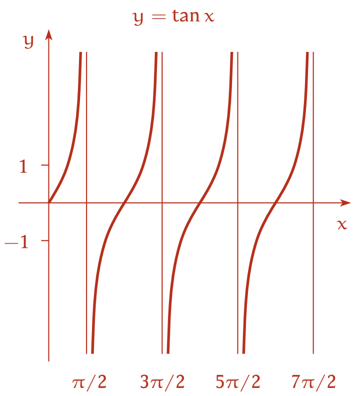
$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \tag{3.30}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\lg a} \cdot \lg x \tag{3.31}$$

3.3.8 Trigonometrische Funktionen







Die vier grundlegenden trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) Sinus ($\sin x$), Kosinus ($\cos x$), Tangens ($\tan x$) und Kotangens ($\cot x$) waren bereits **in Abschnitt 1.1.3 eingeführt und am Einheitskreis veranschaulicht worden**. Sie sind periodisch mit der Periode 2π (Sinus und Kosinus) bzw. π (Tangens und Kotangens).

- Es gelten die folgenden wichtigen Rechenregeln:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(folgt nach Pythagoras)} \tag{3.32}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{3.33}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \tag{3.34}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{3.35}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \tag{3.36}$$

- Periodizitäten:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x \tag{3.37}$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x \tag{3.38}$$

$$\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x \tag{3.39}$$

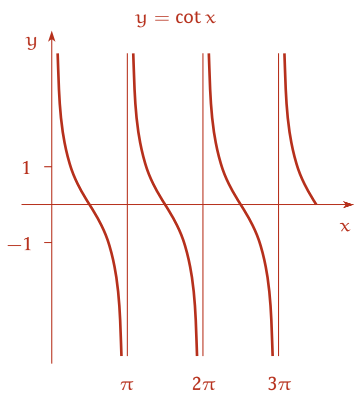
$$\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x \tag{3.40}$$

  k kann jede ganze Zahl einschließlich der Null sein.

- Näherungsformeln: Für kleine Argumente x ($|x| \ll 1$ im Bogenmaß) gilt näherungsweise:

$$\sin x \approx \tan x \approx x \tag{3.41}$$

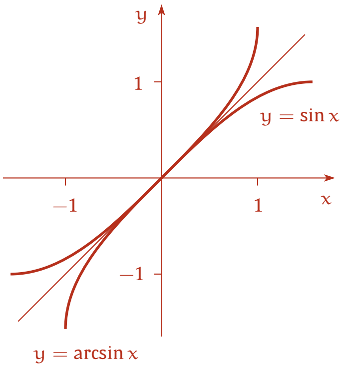
$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2 \tag{3.42}$$



Die Begründung folgt in Abschnitt 3.5.5.

- Additionstheoreme: Zahlreiche weitere Beziehungen der Winkelfunktionen — die Funktionen von Summen, Differenzen, Vielfachen und Bruchteilen der Argumente sowie die Umrechnung einer Winkelfunktion in eine andere — werden durch die **Additionstheoreme** beschrieben. Diese können mit Hilfe der **komplexen Exponentialfunktion** hergeleitet werden (siehe Abschnitt 3.4.8) und sind in den Standard-Formelsammlungen der Mathematik zu finden (z. B. Bronstein-Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch).

3.3.9 Inverse trigonometrische Funktionen (zyklometrische Funktionen, Arcus-Funktionen)

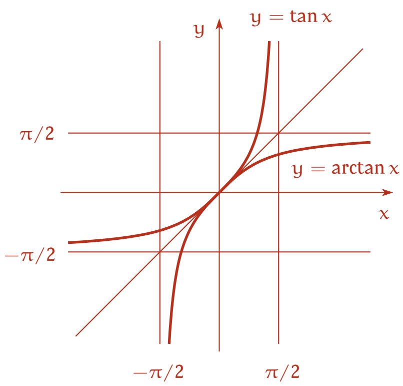


Sie stellen die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen dar:

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin x & \leftrightarrow \quad y &= \sin x \\
y &= \arccos x & \leftrightarrow \quad y &= \cos x \\
y &= \arctan x & \leftrightarrow \quad y &= \tan x \\
y &= \operatorname{arccot} x & \leftrightarrow \quad y &= \cot x
\end{aligned}$$

Manchmal werden die Arcus-Funktionen in der Form $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$ etc. geschrieben. Im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen bezeichnet der Exponent -1 also **nicht** den Kehrwert, sondern die Umkehrfunktion!

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wären die Arcus-Funktionen mehrdeutig. Um dies auszuschließen, beschränkt man ihre Wertebereiche auf die folgenden **Hauptwerte**:



$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2} \tag{3.43}$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \tag{3.44}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arctan x \leqslant +\frac{\pi}{2} \tag{3.45}$$

$$0 \leqslant \operatorname{arccot} x \leqslant \pi \tag{3.46}$$

3.4 Komplexe Zahlen

3.4.1 Motivation: quadratische Gleichung

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.47}$$

Ihre allgemeine Lösung kann mittels quadratischer Ergänzung hergeleitet werden; sie liefert die beiden Werte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.48}$$

Im Bereich der reellen Zahlen gibt es offenbar keine Lösung, falls $4ac > b^2$ ist, weil die Wurzel aus einer negativen Zahl dort nicht definiert ist. Konsequenz: Man führt ein neues, erweitertes Zahlensystem ein, in dem die quadratische Gleichung stets lösbar ist. Darin sollen die reellen Zahlen als Untermenge enthalten sein; außerdem sollen die bekannten Rechenregeln weiterhin gültig bleiben[1].

3.4.2 Imaginäre Einheit

Symbolisch wird eine Zahl i ("imaginäre Einheit") eingeführt, für die per Definition gelte:

$i = \sqrt{-1}$

$$i^2 = -1 \qquad \text{also:} \quad i = \sqrt{-1} \tag{3.49}$$

Zahlen, die das Produkt einer rellen Zahl mit i sind, nennt man dann **imaginäre Zahlen**, z. B.

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$$

Wenn eine Zahl als Summe aus einem reellen und einem imaginären Anteil zusammengesetzt ist, nennen wir sie eine **komplexe Zahl**:

$$z = a + bi \qquad \text{mit } a,\, b \text{ reell} \tag{3.50}$$

a ist der **Realteil**, b der **Imaginärteil** von z. Beachte: der Faktor i ist **nicht** Teil des Imaginärteiles. **Real- und Imaginärteil sind also reelle Zahlen!**

3.4.3 Die Grundrechenarten im Komplexen

Da die Rechenregeln der reellen Zahlen weiterhin gelten, lassen sich die Grundrechenarten leicht elementar ausführen:

- Addition, Subtraktion:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) \\ &= \boxed{(a_1 \pm a_2) + i \cdot (b_1 \pm b_2)} \end{aligned} \tag{3.51}$$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + i^2 b_1 b_2 \\ &= \boxed{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)} \end{aligned} \tag{3.52}$$

- Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \tag{3.53}$$

Um Real- und Imaginärteil des Quotienten z_1/z_2 zu berechnen, wende den folgenden **Trick** an: erweitere den Bruch mit $z^* = a_2 - ib_2$. Beim Ausmultiplizieren wird der Nenner reell:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

[1] Es gibt jedoch eine Ausnahme; siehe Abschnitt 3.4.10.

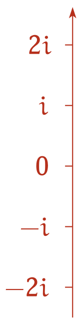
$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} \tag{3.54}$$

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile gleich sind:

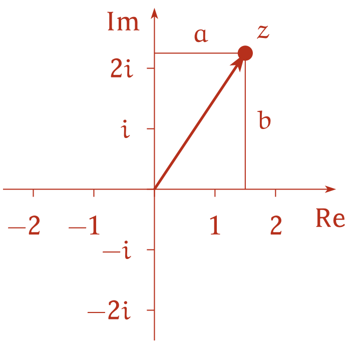
$$\begin{aligned} z_1 = z_2 \quad &\leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2 \\ z = 0 \quad &\leftrightarrow \quad a = b = 0. \end{aligned}$$

3.4.4 Geometrische Darstellung: die komplexe Zahlenebene

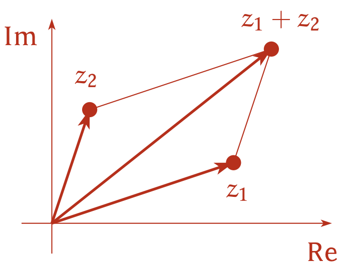
- Die reellen Zahlen kann man als dicht liegende Punkte auf der **reellen Zahlengeraden** anordnen. Sie wird üblicherweise **waagerecht** gezeichnet.



- Entsprechend können die rein imaginären Zahlen auf einer **imaginären Zahlengeraden** angeordnet werden. Diese wird **senkrecht** gezeichnet.



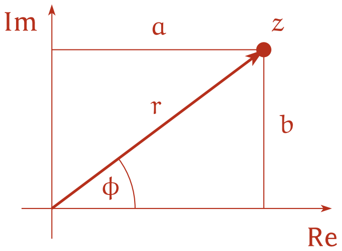
- Die beiden Zahlengeraden kann man in ein gemeinsames Bild einzeichnen. Sie müssen sich im Wert Null schneiden, der einzigen Zahl, die sie gemeinsam haben. Die Achsen spannen dann einen **zweidimensionalen Vektorraum** auf, die **komplexe Zahlenebene**. Jeder Punkt bzw. Ortsvektor in dieser Ebene entspricht einer komplexen Zahl. Ihren Real- und Imaginärteil erhält man — wie üblich — durch Projektion auf die beiden Achsen.



- Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen entsprechen der Addition bzw. Subtraktion der zugehörigen Vektoren in der Zahlenebene (vgl. Abschnitt 2.2). Andererseits: **Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen können nicht mit den bekannten Operationen in einem 2-d Vektorraum veranschaulicht werden.** Die komplexe Multiplikation hat nichts mit dem Skalarprodukt (das einen Skalar, keinen Vektor ergibt) oder dem vektoriellen Produkt (das nur in 3-d definiert ist) zu tun. Die Division durch einen Vektor ist ohnehin nicht erlaubt.

3.4.5 Polarkoordinatendarstellung

Nach Abschnitt 1.2 kann man Punkte in einer Ebene nicht nur mit kartesischen Koordinaten, sondern ebenso mit **Polarkoordinaten** bezeichnen. Dies ist auch bei der Darstellung komplexer Zahlen sinn-



Betrag und Phase

voll:

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi && (3.55)\\
&= r\cdot\cos\phi + r\cdot\sin\phi\cdot i && (3.56)\\
&= r\cdot(\cos\phi + i\,\sin\phi) && (3.57)\\
&= r\cdot e^{i\phi} && (3.58)
\end{aligned}
$$

Man nennt

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{den } \textbf{Betrag} \text{ von } z \qquad (3.59)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{die } \textbf{Phase}^{2} \text{ von } z \qquad (3.60)$$

Die Begründung für die Gültigkeit der Beziehung

$$\cos\phi + i\,\sin\phi = e^{i\phi} \qquad (3.61)$$

→ Abschnitt 3.5.5

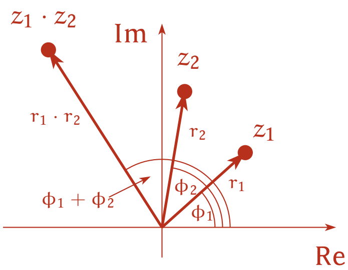
wird in Abschnitt 3.5.5 geliefert.

Beachte: Aus Gleichung (3.61) folgt

$$\left|e^{i\phi}\right| = 1 \qquad (\text{für } \phi \text{ reell}) \qquad (3.62)$$

d. h. alle Zahlen $e^{i\phi}$ liegen auf dem **Einheitskreis**.

Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung lassen sich Multiplikation, Division, Potenzieren und Wurzelziehen im Bereich der komplexen Zahlen leicht veranschaulichen:



- Multiplikation:

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1\,e^{i\phi_1}\cdot r_2\,e^{i\phi_2}\\
&= \boxed{r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}} && (3.63)
\end{aligned}
$$

(Beträge multiplizieren, Phasen addieren)

- Division:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\,e^{i\phi_1}}{r_2\,e^{i\phi_2}}\\
&= \boxed{\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\phi_1-\phi_2)}} && (3.64)
\end{aligned}
$$

(Beträge dividieren, Phasen subtrahieren)

- Potenzierung:

$$
\begin{aligned}
z^n &= \left(r\,e^{i\phi}\right)^n\\
&= \boxed{r^n\cdot e^{in\phi}} && (3.65)
\end{aligned}
$$

(Betrag potenzieren, Phase mit dem Exponenten multiplizieren)

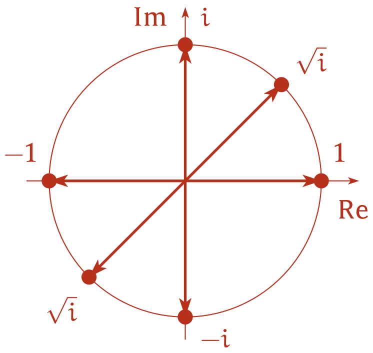
- Wurzelziehen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} &= \left(r\,e^{i\phi}\right)^{1/n}\\
&= \boxed{\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\phi/n}} && (3.66)
\end{aligned}
$$

(Wurzel aus dem Betrag ziehen, Phase durch den Index der Wurzel teilen; siehe aber auch den folgenden Abschnitt 3.4.6)

[2] Beachte hierzu die Fußnote auf S. 8.

3.4.6 Potenzen und Wurzeln von i



- Da $|\mathrm{i}| = 1$ ist, liegen alle Potenzen und Wurzeln von i auf dem **Einheitskreis** und können als $e^{i\phi}$ dargestellt werden. Wir müssen daher nur ihre Phasen ϕ betrachten. i hat die Phase $\pi/2$; also gilt:

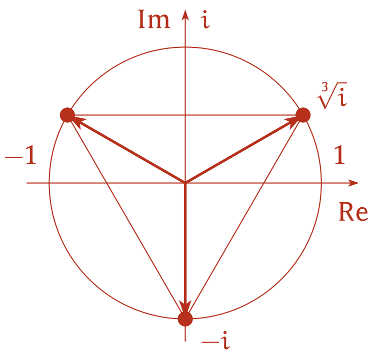
$$i = e^{i\pi/2} \qquad \text{Phase: } \pi/2 \tag{3.67}$$

$$i^2 = e^{i\pi} = -1 \qquad \text{Phase: } \pi \tag{3.68}$$

$$i^3 = e^{i3\pi/2} = -i \qquad \text{Phase: } 3\pi/2 \tag{3.69}$$

$$i^4 = e^{i2\pi} = 1 \qquad \text{Phase: } 2\pi \tag{3.70}$$

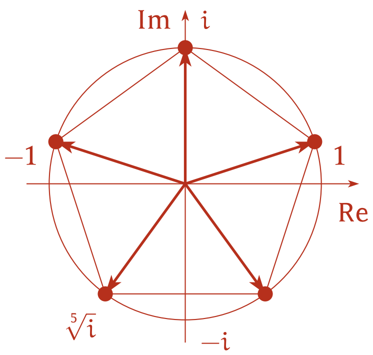
$$i^5 = e^{i5\pi/2} = i \qquad \text{Phase: } 5\pi/2 \text{ (bzw. } \pi/2) \tag{3.71}$$



- Es gibt zwei Quadratwurzeln von i, die die Phasen $\pi/4$ bzw. $5\pi/4$ haben, also

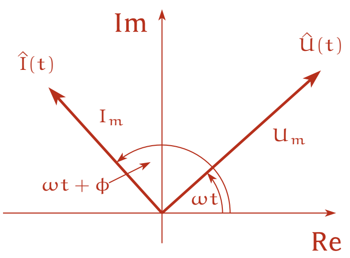
$$\left(\sqrt{i}\right)_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad \text{Phase: } \pi/4 \tag{3.72}$$

$$\left(\sqrt{i}\right)_2 = e^{i5\pi/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \qquad \text{Phase: } 5\pi/4 \tag{3.73}$$



- Beachte: jede komplexe Zahl (außer der Null) hat zwei Quadratwurzeln, drei dritte Wurzeln, vier vierte Wurzeln und — allgemein — n Wurzeln mit Index n. Diese liegen auf einem regelmäßigen n-Eck mit Null im Mittelpunkt. Der Grund besteht darin, dass die Phase einer komplexen Zahl nicht eindeutig ist, sondern nur bis auf Vielfache von 2π festliegt. Die n-ten Wurzeln einer Zahl mit Phase ϕ haben also die Phasen $(\phi + 2k\pi)/n$ mit $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Die nebenstehenden Zeichnungen zeigen als Beispiel die drei dritten Wurzeln und die fünf fünften Wurzeln von i.

3.4.7 Zeigerdiagramme



Die Beziehung zwischen Spannung und Strom in **Wechselstromwiderständen**, z. B. Spulen und Kondensatoren, wird häufig mit so genannten **Zeigerdiagrammen** beschrieben. Dabei werden Spannung und Strom als Vektoren (“Zeiger”) in einer Ebene mit den Beträgen U_m bzw. I_m, die den Maximalwerten entsprechen, dargestellt. Ihre Anfangspunkte liegen im Ursprung; der Winkel, den sie einschließen, gibt die Phasenverschiebung ϕ zwischen Spannung und Strom an. Die beiden Vektoren laufen gemeinsam mit der Kreisfrequenz ω der Wechselspannung in der Ebene um. Die Skizze zeigt als Beispiel das Zeigerdiagramm eines **Kondensators** mit $\phi = \pi/2$.

- Die Zeigerdiagramme lassen sich zwanglos als Darstellung von Spannung und Strom in der **komplexen Zahlenebene** verstehen:

$$\hat{U}(t) = U_m \cdot \exp(i\omega t) \qquad \text{Spannung} \tag{3.74}$$

$$\hat{I}(t) = I_m \cdot \exp[i(\omega t + \phi)] \qquad \text{Strom} \tag{3.75}$$

- Die momentanen Messwerte von Spannung und Strom sind dabei die **Realteile** der komplexen Größen, also ihre Projektion auf die reelle Achse:

$$U(t) = U_m \cdot \cos(\omega t) \tag{3.76}$$
$$I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \phi) \tag{3.77}$$

- Der Quotient $\hat{Z} = \hat{U}_m/\hat{I}_m = (U_m/I_m) \cdot e^{-i\phi}$ ist der **komplexe Wechselstromwiderstand** oder die **Impedanz** des betreffenden Bauteiles. Er enthält sowohl den Betrag des Widerstandes ($|\hat{Z}| = U_m/I_m$) als auch die Phasenverschiebung ϕ.

3.4.8 Additionstheoreme

Die Additionstheoreme beschreiben Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen. Sie können mit Hilfe der **komplexen Exponentialfunktion** leicht hergeleitet werden. Als Beispiel soll der Sinus- bzw. Kosinus-Wert einer Summe oder Differenz zweier Winkel durch die Funktionswerte der einzelnen Summanden ausgedrückt werden.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = ? \tag{3.78}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = ? \tag{3.79}$$

Die komplexe Exponentialfunktion liefert

$$e^{i(\alpha\pm\beta)} = \cos(\alpha \pm \beta) + i\,\sin(\alpha \pm \beta) \tag{3.80}$$

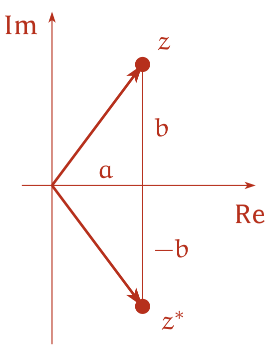
und andererseits

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha\pm\beta)} &= e^{i\alpha}\,e^{\pm i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta \pm i\,\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta + i\,(\sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta) \end{aligned} \tag{3.81}$$

Der **Vergleich der Imaginär- und Realteile** von Gl. (3.80) und (3.81) ergibt die Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta \tag{3.82}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta \tag{3.83}$$

3.4.9 Konjugiert komplexe Zahl



Die zu einer gegebenen komplexen Zahl

$$z = a + bi \tag{3.84}$$

gehörige **konjugiert komplexe Zahl**

$$z^* = a - bi \tag{3.85}$$

ist definiert als diejenige Zahl, die den gleichen Realteil, aber den **negativen Imaginärteil** von z hat ($b \to -b$). Geometrisch entspricht das der **Spiegelung an der reellen Achse**.

- Beachte: es ist

$$z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = r^2 \tag{3.86}$$

(reell). Das war bereits bei der komplexen Division [Gl. (3.54)] ausgenützt worden. Der Betrag r einer komplexen Zahl kann daher gemäß

$r = \sqrt{z \cdot z^*}$

$$r = \sqrt{z \cdot z^*} \tag{3.87}$$

berechnet werden.

- Außerdem gilt

$$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{1}{2}(z + z^*) \tag{3.88}$$

$$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{1}{2i}(z - z^*) \tag{3.89}$$

3.4.10 Vergleichsoperationen

$<$, $>$ etc. **nicht erlaubt!**

Achtung: Vergleichsoperationen ($<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$) dürfen im Bereich der komplexen Zahlen **nicht** angewandt werden, weil dies zu Widersprüchen führen würde. Man kann also z. B. nicht entscheiden, ob $i < 1$ oder $i > 1$ ist. Nur reelle Größen wie Beträge, Real- und Imaginärteile komplexer Zahlen können miteinander verglichen werden.

3.4.11 Wozu also komplexe Zahlen?

Wir hatten die komplexen Zahlen in den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 eingeführt, um — zunächst rein formal — die quadratische Gleichung stets lösen, d. h., die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen zu können. Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung ist auf der komplexen Zahlenebene jetzt leicht verständlich, wie und warum das funktioniert.

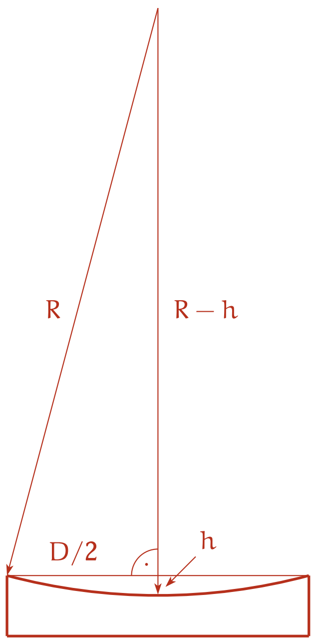
Positive reelle Zahlen haben die Phase 0 bzw. 2π; ihre Quadratwurzeln haben also die Phase 0 oder π und liegen ebenfalls auf der reellen Achse. Die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl (Phase π bzw. 3π) hat dagegen die Phase $\pi/2$ oder $3\pi/2$ und liegt auf der imaginären Achse.

Überhaupt ist die Phase eine wichtige Eigenschaft komplexer Zahlen, weil mit ihrer Hilfe auch die Phasenlage oder Phasenverschiebung physikalischer Phänomene — insbesondere periodischer — leicht beschrieben werden kann. Als Beispiel wurde in Abschnitt 3.4.7 die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung in Wechselstromkreisen genannt. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Phasenverschiebung zwischen Anregung und momentaner Auslenkung bei erzwungenen Schwingungen. Diese hängt in charakteristischer Weise von der Anregungsfrequenz ab und kann mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion elegant berechnet werden.

3.5 Potenzreihenentwicklung von Funktionen

3.5.1 Motivation

Eine Hobbyastronomin möchte den Hauptspiegel für ihr neues Teleskop schleifen. Sein Durchmesser D und Krümmungsradius R sind



vorgegeben. Sie rechnet aus, wie tief sie die Kugelfläche in den Glasrohling einschleifen muss (die so genannte Pfeiltiefe h).

- Nach Pythagoras gilt

$$(R-h)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2 \tag{3.90}$$

Auflösen nach der Pfeiltiefe h liefert

$$h = R \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{D^2}{4R^2}}\right) \tag{3.91}$$

oder

$$\frac{h}{R} = 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \qquad \text{mit } a = \frac{D}{R} \tag{3.92}$$

Die dimensionslose Größe a beschreibt das Verhältnis zwischen Durchmesser und Krümmungsradius des Spiegels.

- Häufig — insbesondere bei kleineren Amateur-Teleskopen — verwendet man langbrennweitige Spiegel mit $D \ll R$, d. h. $a \ll 1$. In diesem Grenzfall kann Gl. (3.92) gut durch den folgenden einfacheren Ausdruck angenähert werden:

$$\frac{h}{R} \approx \frac{a^2}{8} \tag{3.93}$$

Die Näherung wird umso besser, je kleiner a ist[3]:

a	0,1	0,3	0,7	1,0	1,5
h/R (exakt)	0,00125	0,01131	0,0633	0,134	0,339
$a^2/8$	0,00125	0,01125	0,0613	0,125	0,281

- Die Näherung $a^2/8$ ist der erste Term der **Entwicklung der exakten Formel** [Gl. (3.92)] **in eine Potenzreihe**. Sie kann verbessert werden, indem man weitere Korrekturterme mit höheren Potenzen von a hinzunimmt.

3.5.2 Reihe und Potenzreihe

- Unter einer **Reihe** verstehen wir in der Mathematik eine Summe von Termen, z. B.

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.94}$$

oder, mit dem Summenzeichen geschrieben,

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.95}$$

In diesem Beispiel enthält die Reihe unendlich viele Terme.

- Stetige Funktionen $f(x)$ können meist als **Potenzreihe** (auch **Taylor-Reihe** genannt) ihrer unabhängigen Variablen x dargestellt werden:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{3.96}$$

[3] In der Praxis liegt a bei Amateur-Teleskopen meist zwischen 0,06 und 0,3.

oder mit dem Summenzeichen

Entwicklung um $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.97}$$

Zur Definition des Begriffes “Stetigkeit” und zu weiteren formalen Voraussetzungen für die Zulässigkeit der Potenzreihenentwicklung siehe die Lehrbücher der Mathematik.

- In Gl. (3.96) und (3.97) erfolgt die Entwicklung der Funktion um den Punkt $x_0 = 0$. Sie kann jedoch auch um einen anderen Punkt x_0 herum durchgeführt werden. Das ist sogar zwingend erforderlich, wenn die Funktion für $x_0 = 0$ (oder in der Umgebung von $x_0 = 0$) nicht definiert ist. So werden Logarithmus-Funktionen und auch Wurzelfunktionen wie in Gl. (3.92) üblicherweise um $x_0 = 1$ herum entwickelt[4]. Gl. (3.96) und (3.97) sind dann zu verallgemeinern:

$$f(x_0 + x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{3.98}$$

bzw.

Entwicklung um allg. x_0

$$f(x_0 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.99}$$

Mit $\xi = x_0 + x$ kann man alternativ auch schreiben:

$$\begin{aligned} f(\xi) = a_0 + a_1 (\xi - x_0) + a_2 (\xi - x_0)^2 + \cdots \\ + a_n (\xi - x_0)^n + \cdots \end{aligned} \tag{3.100}$$

bzw.

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - x_0)^n \tag{3.101}$$

- Für den Term nullter Ordnung gilt offensichtlich: $a_0 = f(x_0)$. Zur Berechnung der höheren Koeffizienten a_n mit $n \geqslant 1$ wird die Differentialrechnung benötigt; siehe Abschnitt 4.6.2.

- Bei praktischen Rechnungen berücksichtigt man so viele Terme einer Potenzreihenentwicklung, wie für eine hinreichende Genauigkeit erforderlich sind (z. B. bis der Fehler kleiner ist als der Fehler von Messpunkten, die mit einer Theorie verglichen werden sollen). In vielen Fällen reicht der Entwicklungsterm niedrigster Ordnung (oder allenfalls noch der nächsthöhere) bereits aus.

3.5.3 Fakultät

$n!$ (sprich “n-Fakultät”)

Für die folgenden Abschnitte wird der Begriff der Fakultät ($n!$) benötigt. Sie ist für natürliche Zahlen n einschließlich der Null definiert:

[4] In Gl. (3.92) entspricht das dem betrachteten Grenzfall $a \ll 1$.

$$0! = 1 \tag{3.102}$$

$$1! = 1 \tag{3.103}$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2 \tag{3.104}$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \tag{3.105}$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \tag{3.106}$$

$$\vdots$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad \text{für } n \geqslant 1 \tag{3.107}$$

3.5.4 Potenzreihen einiger spezieller Funktionen

1. Geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-x} &= a\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right) \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned} \tag{3.108}$$

(Konvergenzbereich: $|x| < 1$)

Hier sind alle Koeffizienten gleich.

2. Natürlicher Logarithmus

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \end{aligned} \tag{3.109}$$

(Konvergenzbereich: $-1 < x \leqslant +1$)

3. Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} = 1 &+ \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 \\ &- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots \end{aligned} \tag{3.110}$$

(Konvergenzbereich: $|x| \leqslant 1$)

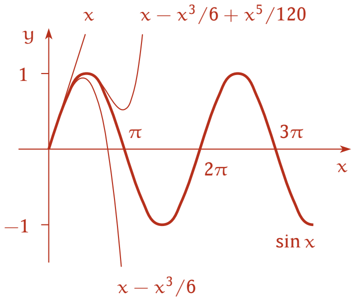
Beachte: in Gl. (3.92) ist $x = -a^2/4$; daher ist die Näherung niedrigster Ordnung [Gl. (3.93)] quadratisch in a. Auch die höheren Ordnungen enthalten nur gerade Potenzen von a.

4. Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \end{aligned} \tag{3.112}$$

(Konvergenzbereich: $|x| < \infty$)



5. Sinus

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{3.113}$$
(Konvergenzbereich: $|x| < \infty$)

Die Zeichnung zeigt die exakte Sinus-Funktion und ihre ersten drei Näherungen.

6. Kosinus

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{3.114}$$
(Konvergenzbereich: $|x| < \infty$)

7. Tangens

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots \tag{3.115}$$
(Konvergenzbereich: $|x| < \pi/2$)

$\sin x \approx \tan x \approx x$
$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$
für $|x| \ll 1$

Aufgrund der letzten drei Reihenentwicklungen werden die früher beschriebenen Näherungen der trigonometrischen Funktionen bei kleinen Argumenten [Gl. (3.41) und (3.42)] verständlich.

Zu weiteren Reihenentwicklungen siehe die Formelsammlungen der Mathematik (z. B. Bronstein-Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch).

3.5.5 Eulersche Formeln

Beim Vergleich der Potenzreihen der Exponential-, der Sinus- und der Kosinus-Funktion fällt auf, dass sie alle ähnliche Koeffizienten haben.

- Um den Zusammenhang dieser Reihen genauer zu erkennen, gehen wir von der Potenzreihe der Exponentialfunktion [Gl. (3.111)] aus und ersetzen das Argument x durch ix:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}\,ix + \frac{1}{2!}\,(ix)^2 + \frac{1}{3!}\,(ix)^3 + \frac{1}{4!}\,(ix)^4 + \cdots \tag{3.116}$$

- Nach dem Berechnen der Potenzen von i fassen wir die reellen und die imaginären Terme zusammen

$$e^{ix} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$
$$+\, i \cdot \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \right) \tag{3.117}$$

und erhalten durch Vergleich mit Gl. (3.113) und (3.114)

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\,\sin x} \tag{3.118}$$

Diese Beziehung war bei der Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen [Gl. (3.57) und (3.58)] verwendet worden.

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

- Analog kann man herleiten

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \sin x} \tag{3.119}$$

- Die Gleichungen (3.118) und (3.119) heißen **Eulersche Formeln**. Sie zeigen, dass die Exponentialfunktion für rein imaginäre Argumente **oszillierendes (d. h. periodisches) Verhalten** zeigt und ausschließlich Werte auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene annimmt. Mit ihrer Hilfe lassen sich daher **Schwingungs- und Wellenphänomene** sehr elegant beschreiben. Siehe hierzu die Abschnitte 3.4.7 und 6.3.

→ Abschnitte 3.4.7 und 6.3

- Aus Gl. (3.118) und (3.119) folgt schließlich

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{3.120}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \tag{3.121}$$

4 Differentialrechnung

4.1 Grundlagen

In den Kapiteln 4 und 5 werden die **Differentialrechnung** und die **Integralrechnung** behandelt. Beide Gebiete fasst man unter dem Begriff **Infinitesimalrechnung** zusammen, was **Rechnen mit unendlich kleinen Größen** bedeutet. Man kann mit solchen Größen durchaus rechnen und erhält sinnvolle (meist endlich große) Ergebnisse, sofern man die Regeln beachtet.

Differential- und Integralrechnung sind "inverse", d. h. "umgekehrte" Rechenoperationen, die man auf Funktionen anwenden kann. Wir werden die Infinitesimalrechnung — von wenigen einfachen Ausnahmen abgesehen — hier nur im Zusammenhang mit reellen Funktionen einer oder mehrerer reeller Variablen behandeln. Die Erweiterung auf die gesamte komplexe Zahlenebene führt zur **Funktionentheorie**, einem wichtigen Teilgebiet der Mathematik.

4.1.1 Der Zuwachs

$\Delta x = x_2 - x_1$

Δx, Δy etc.

- Wir betrachten eine unabhängige Variable x. Wenn man x von einem Anfangswert x_1 bis zu einem Endwert x_2 verändert, so bedeutet dies einen **Zuwachs** $\Delta x = x_2 - x_1$. Dieser kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob $x_2 > x_1$ oder $x_2 < x_1$ ist. Das Symbol Δ kennzeichnet (endlich große) Zuwächse von Variablen.
- Für eine Funktion $y = f(x)$ der unabhängigen Variablen x hat dies die folgende Konsequenz: Wenn x um Δx verändert wird, erfährt auch y einen Zuwachs, der ebenfalls positiv oder negativ sein kann und von den x-Werten abhängt:

$$y_1 = f(x_1) \tag{4.1}$$
$$y_2 = f(x_2) \tag{4.2}$$

  und damit

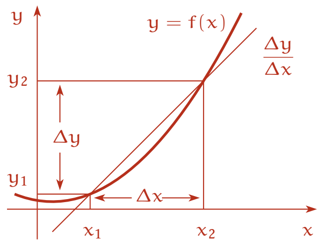
$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \tag{4.3}$$

- Bei der linearen Funktion bzw. Geraden hängt Δy nur von Δx ab: Δy ist **proportional** zu Δx. Bei allen anderen Funktionen ist Δy auch explizit von den einzelnen Werten x_1 und x_2 abhängig.

4.1.2 Der Differenzenquotient

- Gegeben seien wieder eine Funktion $f\colon x \to f(x) = y$, ein Zuwachs $\Delta x = x_2 - x_1$ in x-Richtung und der zugehörige Zuwachs $\Delta y = y_2 - y_1$ der Funktionswerte. Um die Zuwächse besser miteinander vergleichen zu können, dividieren wir Δy durch Δx und erhalten den **Differenzenquotienten**

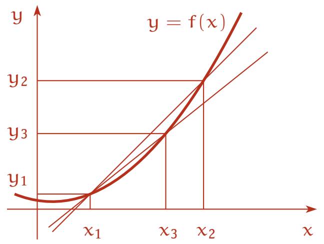
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{4.4}$$



- Bei der **linearen Funktion** bzw. **Geraden** $y = a\,x + b$ ist der Differenzenquotient **konstant**, d. h. für alle Paare $(x_1; x_2)$ gleich.

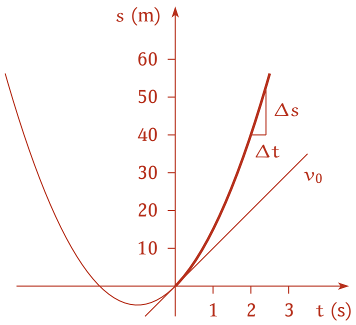
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \text{const.} \tag{4.5}$$

- Bei einer **beliebigen Funktion** beschreibt der Differenzenquotient die **mittlere relative Änderung** der Funktion im Intervall $(x_1; x_2)$.



- Der Differenzenquotient gibt die Steigung der **Sehne (Sekante)** zwischen den Kurvenpunkten $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ an. Er ist — außer bei der Geraden — abhängig von der Intervallbreite:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4.6}$$



- Beispiel aus der Physik: **frei fallender Körper mit endlicher Anfangsgeschwindigkeit**. Wir betrachten einen unter dem Einfluss der Schwerkraft frei fallenden Körper, der bereits mit einer von Null verschiedenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen werde. Wir wollen seine Fallgeschwindigkeit zu späteren Zeiten berechnen.

  Der bis zur Zeit t zurückgelegte Fallweg beträgt

$$s(t) = v_0\,t + \frac{1}{2}gt^2$$

  Während eines Zeitintervalles Δt fällt der Körper das Stück

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

  Folglich ist $\Delta s/\Delta t$ seine **mittlere Geschwindigkeit** auf dem Weg Δs von $s(t)$ nach $s(t + \Delta t)$. Diese berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 + v_0\,(t+\Delta t) - \frac{1}{2}gt^2 - v_0\,t\right] \\ &= gt + v_0 + \frac{1}{2}g\Delta t\end{aligned}$$

  Je kürzer das Zeitintervall Δt gewählt wird, umso weniger verändert sich die mittlere Geschwindigkeit von einem Intervall zum nächsten. Im Grenzfall $\Delta t \to 0$ wird sie schließlich von der Intervallbreite unabhängig und strebt dem Wert $gt + v_0$ zu, der wahren Fallgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

4.1.3 Differentialquotient, Ableitung

- Um die relative Änderung einer Funktion (d. h. die Steigung des Funktionsgraphen) unabhängig von der Intervallbreite angeben zu können, bildet man den **Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$**. Man schreibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4.7}$$

  oder

$\frac{dy}{dx} = y'(x)$

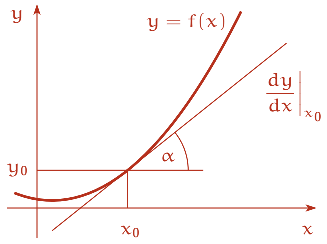
$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) \tag{4.8}$$

- dy/dx nennt man den **Differentialquotienten** oder die **Ableitung** der Funktion $y = f(x)$ nach x (gesprochen "dy nach dx"). Sie ist im Allgemeinen selbst wieder eine Funktion der Variablen.
- In unserem Beispiel des frei fallenden Körpers ist

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + v_0$$

die Fallgeschwindigkeit zur Zeit t. Sie nimmt linear mit der Zeit zu.

4.1.4 Geometrische Bedeutung der Ableitung



Wenn die Intervallbreite der unabhängigen Variablen gegen Null strebt ($\Delta x \to 0$), geht die **Sekante** in die **Tangente** über, die den Funktionsgraphen in einem Punkt x_0 berührt und dort die gleiche Steigung hat. Die Ableitung ist also gleich der **Steigung der Tangente im Punkt x_0** und gleich dem Tangens des Winkels α, den diese mit der Waagerechten einschließt.

4.1.5 Beispiele

1. Es sei $y(t)$ die **Stoffmenge** einer Substanz während einer chemischen Reaktion. Dann ist

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$$

die **Reaktionsgeschwindigkeit**, d. h. die **Umsatzrate** der Substanz. Beachte:

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$

$$\boxed{\text{bei Zeitableitungen schreibt man häufig } \dot{y} \text{ statt } y'}$$

2. Es sei $Q(T)$ der **Wärmeinhalt** einer Probe bei der absoluten Temperatur T. Dann ist

$$\frac{dQ}{dT} = C(T)$$

die **Wärmekapazität** der Probe bei dieser Temperatur. Nebenbei: die auf ein Mol bezogene Wärmekapazität (**spezifische Wärme** genannt) und ihre Temperaturabhängigkeit sind wichtige Größen in der Wärmelehre und Festkörperphysik.

3. Es sei $n(t)$ die **Individuenzahl** einer Population (z. B. einer Bakterienkultur) zur Zeit t. Dann ist

$$\frac{dn}{dt} = \dot{n}(t)$$

ihre **Wachstumsrate** (vgl. Abschnitt 6.3).

4. Das **elektrische Potential** in der Umgebung einer Punktladung Q variiert mit dem Abstand r von der Ladung gemäß

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Darin ist $\epsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, eine Naturkonstante. Die **elektrische Feldstärke** $\vec{E}$, die von der Ladung erzeugt wird, ist ein Vektor, der aus Symmetriegründen radial von der Ladung weg oder zu ihr hin zeigt (je nach dem Vorzeichen von Q) und dessen Betrag durch die Beziehung

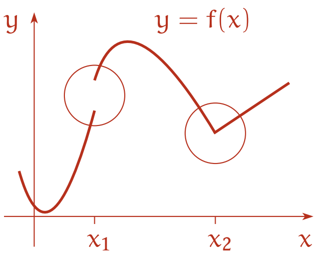
$$E(r) = -\frac{d\phi}{dr}$$

mit dem Potential zusammenhängt. Wir wollen $E(r)$ analog zur Fallgeschwindigkeit oben berechnen:[1]

$$\begin{aligned}
E(r) &= -\frac{d\phi}{dr} = -\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta r} \\
&= -\lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r} \right] \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r} \frac{r - (r + \Delta r)}{r \cdot (r + \Delta r)} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{r^2 + r\Delta r} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\
&= E_c(r)
\end{aligned}$$

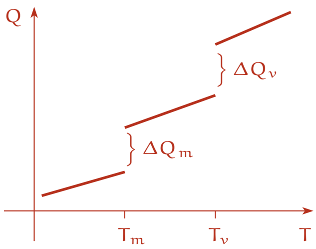
Das Ergebnis ist, wie erwartet, die bekannte Coulomb-Feldstärke $E_c(r)$ in der Umgebung einer Punktladung.

4.1.6 Differenzierbarkeit



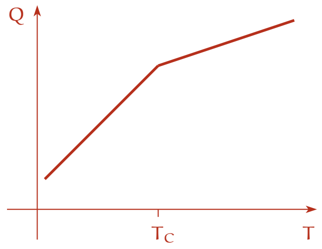
Damit eine Funktion $f\colon x \to f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist, muss sie dort zum Einen **stetig** sein, und außerdem muss ihre Ableitung bei Annäherung von links und rechts an x_0 **gegen denselben Wert streben**. Anschaulich bedeutet das, dass der Funktionsgraph an der Stelle x_0 **keinen Sprung und keinen Knick** aufweisen darf. Die Funktion in der nebenstehenden Skizze ist an den Stellen x_1 und x_2 nicht differenzierbar.

Beispiele aus der Wärmelehre: **Wärmeinhalt** $Q(T)$ einer Probensubstanz in der Umgebung von **Phasenübergängen**.



1. **Phasenübergänge 1. Ordnung:** Beim Schmelzen oder Verdampfen muss man einer Substanz Wärme, d. h. Energie, zuführen, ohne dass sich ihre Temperatur ändert. Die zugeführte Wärmemenge nennt man **latente Wärme** (Schmelzwärme ΔQ_m bzw. Verdampfungswärme ΔQ_v); sie wird für den Übergang zwischen zwei unterschiedlich stark geordneten Aggregatzuständen benötigt. Ober- und unterhalb der Phasenübergangstemperatur ist die Änderung des Wärmeinhaltes Q mit der Temperatur T zudem im Allgemeinen verschieden. Die Wärmekapazität $C(T) = dQ/dT$ ist daher bei der Schmelztemperatur T_m und der Siedetemperatur T_v nicht definiert; die Funktion $Q(T)$ ist dort **nicht differenzierbar**.

[1] Für die Berechnung der Komponenten des Vektors $\vec{E}$ werden partielle Ableitungen benötigt; siehe hierzu Abschnitt 4.8.5.



2. **Phasenübergänge 2. Ordnung:** Ferromagnetische Metalle wie z. B. Eisen haben ihre ferromagnetische Eigenschaft nur unterhalb einer bestimmten Temperatur, der **Curie-Temperatur** T_C. Für Eisen beträgt diese 770 °C. Bei höheren Temperaturen verhindert die Wärmebewegung die Ausrichtung der atomaren magnetischen Momente, und das Metall wird paramagnetisch. Der Wärmeinhalt verläuft an der Curie-Temperatur stetig, aber seine Ableitung $C(T) = dQ/dT$ ändert sich sprunghaft. $Q(T)$ ist also auch in diesem Fall an der Temperatur T_C **nicht differenzierbar**.

4.2 Ableitungen elementarer Funktionen

4.2.1 Kleine Tabelle zum Nachschlagen

$$y(x) = \text{const.} \qquad y'(x) = 0 \tag{4.9}$$
$$y(x) = x^n \qquad y'(x) = n\,x^{n-1} \quad (n \text{ beliebig}) \tag{4.10}$$
$$y(x) = \sin x \qquad y'(x) = \cos x \tag{4.11}$$
$$y(x) = \cos x \qquad y'(x) = -\sin x \tag{4.12}$$
$$y(x) = \tan x \qquad y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4.13}$$
$$y(x) = \cot x \qquad y'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{4.14}$$
$$y(x) = e^x \qquad y'(x) = e^x \tag{4.15}$$
$$y(x) = a^x \qquad y'(x) = \ln a \cdot a^x \tag{4.16}$$
$$y(x) = \ln x \qquad y'(x) = \frac{1}{x} \tag{4.17}$$
$$y(x) = \log_a x \qquad y'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \tag{4.18}$$

4.2.2 Beispiele

$$y(x) = x \qquad y'(x) = 1 \tag{4.19}$$
$$y(x) = x^2 \qquad y'(x) = 2x \tag{4.20}$$
$$y(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \qquad y'(x) = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6} \tag{4.21}$$
$$y(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad y'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{4.22}$$
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \qquad y'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \tag{4.23}$$
$$y(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3} \qquad y'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} \tag{4.24}$$

4.2.3 Drei illustrative Beweise

Mathematische Beweise werden in dem vorliegenden Skript meist weggelassen. Anhand von drei einfachen Beispielen soll aber die Vorgehensweise gezeigt werden.

1. **Potenzfunktion mit ganzzahligem positivem Exponenten:** $y = x^n$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[x^n + n\, x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \cdots - x^n \right] \\ &= n\, x^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \cdots \\ &= \boxed{n\, x^{n-1}}\end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren der Klammer $(x+\Delta x)^n$ liefert Terme der Form $x^{n-k}(\Delta x)^k$; $k = 0, \ldots, n$ (mit Vorfaktoren). Beim Dividieren durch Δx und der anschließenden Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ fallen alle Terme mit $k \geqslant 2$ weg.

2. **natürlicher Logarithmus:** $y = \ln x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^{-1} \left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \ldots \right] \\ &= \boxed{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

In der dritten Zeile wurde die Potenzreihenentwicklung der ln-Funktion verwendet; siehe Abschnitt 3.5.4. Alle Ordnungen der Potenzreihe ab der quadratischen fallen bei der Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ wiederum weg.

3. **Exponentialfunktion:** $y = e^x$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 0 + 1 + \frac{2}{2!}x + \frac{3}{3!}x^2 + \frac{4}{4!}x^3 + \frac{5}{5!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ &= \boxed{e^x}\end{aligned}$$

Beim Ableiten der Potenzreihe fällt der konstante Term 1 weg. In einer unendlichen Reihe spielt das keine Rolle: jeder Term der ursprünglichen Reihe findet sich auch in der abgeleiteten wieder.

4.3 Regeln für zusammengesetzte Funktionen

4.3.1 Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad f'(x) = g'(x) + h'(x) \qquad (4.25)$$

bzw.

$$y = u + v \qquad y' = u' + v' \tag{4.26}$$

4.3.2 Konstanter Vorfaktor

$$f(x) = c \cdot g(x) \qquad f'(x) = c \cdot g'(x) \tag{4.27}$$

bzw.

$$y = c \cdot u \qquad y' = c \cdot u' \tag{4.28}$$

4.3.3 Kombination von 4.3.1 und 4.3.2

$$f(x) = c_1 \cdot g(x) + c_2 \cdot h(x) \qquad f'(x) = c_1 \cdot g'(x) + c_2 \cdot h'(x) \tag{4.29}$$

bzw.

$$y = c_1 \cdot u + c_2 \cdot v \qquad y' = c_1 \cdot u' + c_2 \cdot v' \tag{4.30}$$

Diese intuitive Ableitungsregel wurde bereits im letzten Beweis von Abschnitt 4.2.3 angewandt.

4.3.4 Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \tag{4.31}$$

bzw.

$$y = u \cdot v \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{4.32}$$

entsprechend bei mehr als zwei Faktoren:

$$y = u \cdot v \cdot w \qquad y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \tag{4.33}$$

etc.

4.3.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f'(x) = \frac{h(x)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)}{[h(x)]^2} \tag{4.34}$$

bzw.

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{v\, u' - u\, v'}{v^2} \tag{4.35}$$

Merkhilfe für die richtige Reihenfolge im Zähler der Ableitung: die unabgeleitete Funktion $h(x)$ steht quadratisch im Nenner, und sie wird auch — unquadriert und im Produkt mit $g'(x)$ — an die erste Stelle des Zählers geschrieben.

4.3.6 Ableitung der reziproken Funktion

$$f(x) = \frac{1}{h(x)} \qquad f'(x) = -\frac{h'(x)}{[h(x)]^2} \tag{4.36}$$

bzw.

$$y = \frac{1}{v} \qquad y' = -\frac{v'}{v^2} \tag{4.37}$$

Das ist ein Spezialfall der Quotientenregel (s. o.).

4.3.7 Kettenregel

Eine Funktion habe die Form

$$f(x) = g\,[h(x)] \tag{4.38}$$

oder

$$f(x) = g(y) \qquad \text{mit} \quad y = h(x) \tag{4.39}$$

Dann ist

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dy}\,g(y)\right] \cdot \left[\frac{d}{dx}\,h(x)\right] = g'(y) \cdot h'(x) \tag{4.40}$$

"Nachdifferenzieren" nicht vergessen!

Die äußere Funktion g wird also zunächst nach ihrem Argument y differenziert, und das Ergebnis wird mit der Ableitung der inneren Funktion $y = h(x)$ nach deren Argument x multipliziert. Diese Multiplikation mit $h'(x)$ bezeichnet man manchmal als **Nachdifferenzieren**.

Beispiel:

$$f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2 = y^2 \qquad \text{mit} \quad y = \cos x$$

$$f'(x) = 2y \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \, \cos x = -\sin(2x)$$

Die letzte Umformung $-2 \sin x \, \cos x = -\sin(2x)$ ist eines der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen; sie hat mit der eigentlichen Ableitung und der Kettenregel nichts zu tun.

4.4 Ableitung der inversen Funktion (Umkehrfunktion)

- Zwei Funktionen f und F seien zueinander Umkehrfunktionen, so dass gilt:

$$y = f(x) \tag{4.41}$$

und

$$x = F(y) \tag{4.42}$$

- Wir leiten beide Seiten von Gl. (4.42) nach x ab. Linke Seite:

$$\frac{d}{dx}\,x = 1 \tag{4.43}$$

rechte Seite (mit Hilfe der Kettenregel):

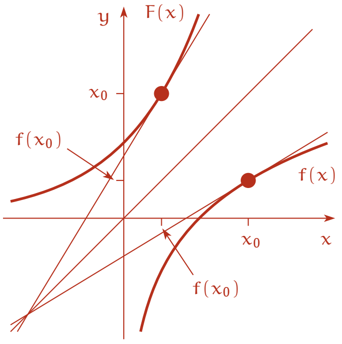
$$\frac{d}{dx}\,F(y) = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{df}{dx} \tag{4.44}$$

- Gleichsetzen der rechten Seiten von Gl. (4.43) und (4.44) liefert

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dF}{dy}} \tag{4.45}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{4.46}$$



- **Die Ableitung der Umkehrfunktion $F(y)$ ist das Reziproke der Ableitung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ und umgekehrt.** Damit wird das frühere Ergebnis bestätigt, dass die Graphen der beiden Funktionen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten auseinander hervorgehen.
- Man kann — wie üblich — die Variable von F wieder x nennen, muss dann aber beachten, dass die Ableitungen von f und F, die durch Gl. (4.45) miteinander verknüpft sind, an **unterschiedlichen Stellen der x-Achse** zu berechnen sind. Die nebenstehende Skizze verdeutlicht dies. In ihr ist ein Wertepaar $[x_0; f(x_0)]$ auf beiden Achsen angezeichnet.

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \frac{1}{\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{f(x_0)}}} \tag{4.47}$$

- Beispiel:

$$y = f(x) = \ln x \qquad \text{d. h.} \quad x = F(y) = e^y;\ x' = e^y$$

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

wie bekannt.

4.5 Beispiele

4.5.1 Summenregel und konstanter Vorfaktor

$$y = x^3 + 7x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 3x^2 + 14x - 3$$

$$y = \sin x - \cos x$$
$$y' = \cos x + \sin x$$

4.5.2 Produktregel

$$y = \sin x \cdot \cos x$$
$$y' = \sin x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$y = e^x \cdot \sin x$$
$$y' = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$$

4.5.3 Quotientenregel

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3x}{5+x} \\
y' &= \frac{(5+x)\cdot 3 - 3x\cdot 1}{(5+x)^2} = \frac{15}{(5+x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
y' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

4.5.4 Reziproke Funktion

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1+x^2} && \text{d. h.} \quad h(x) = 1 + x^2 \\
y' &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

4.5.5 Kettenregel

$$
\begin{aligned}
y &= \left(x^3+1\right)^2 \\
y' &= 2\cdot\left(x^3+1\right)\cdot 3x^2 = 6x^5 + 6x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2+1} \\
y' &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sin(\omega t) && \text{Variable: } t \\
\dot{y} &= \omega \, \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-i\omega t} && \text{Variable: } t \\
\dot{y} &= -i\omega \, e^{-i\omega t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sin^2 x = (\sin x)^2 \\
y' &= 2 \, \sin x \, \cos x = \sin(2x) && \text{(2. Schritt: Additionstheorem)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sin\left(x^2\right) \\
y' &= \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x \, \cos\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{ax} \\
y' &= a \, e^{ax}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{f(x)} \\
y' &= f'(x)\cdot e^{f(x)}
\end{aligned}
$$

4.5.6 Umkehrfunktion

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{d. h.} \quad x = y^2;\ x' = 2y$$
$$y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \arcsin x \qquad \text{d. h.} \quad x = \sin y;\ x' = \cos y$$
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$y = \arctan x \qquad \text{d. h.} \quad x = \tan y;\ x' = \frac{1}{\cos^2 y}$$
$$\begin{aligned} y' &= \cos^2 y = [\cos(\arctan x)]^2 \\ &= \frac{1}{1 + [\tan(\arctan x)]^2} \qquad \text{(Additionstheorem)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

4.6 Mehrfache Ableitungen

4.6.1 Grundlagen

- Wenn die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ wieder eine differenzierbare Funktion ist, kann sie selbst abgeleitet werden. Dadurch erhält man die **zweite Ableitung** von $f(x)$. Man kann schreiben
$$\begin{aligned} y'' &= f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d}{dx} f'(x) \end{aligned} \tag{4.48}$$
- Analog lassen sich auch höhere Ableitungen bilden. Allgemein schreibt man
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \tag{4.49}$$
- Beispiel: n-te Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$:
$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{d^n}{dx^n} x^n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(n\, x^{n-1}\right) = n\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! \end{aligned}$$

4.6.2 Beispiel 1: Koeffizienten einer Potenzreihe

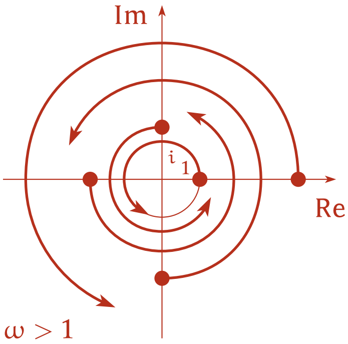
Stetige Funktionen lassen sich häufig in einem bestimmten Intervall als **Potenzreihe (Taylor-Reihe)** mit Entwicklungspunkt x_0 darstellen:

$$f(x_0 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.50}$$

(vgl. Abschnitte 3.5.2 bis 3.5.4). Die Koeffizienten a_n ergeben sich aus den n-ten Ableitungen der Funktion an der Stelle x_0:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{4.51}$$

4.6.3 Beispiel 2: Die Ableitungen der komplexen Exponentialfunktion



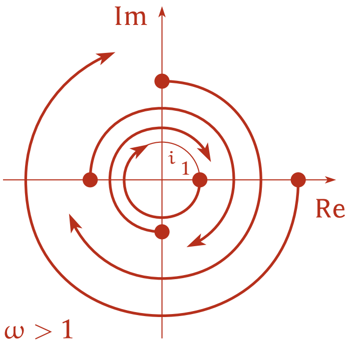
- Wir betrachten die komplexe Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{i\omega t} \qquad = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

mit der reellen Variablen t. Ihre ersten vier Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\dot{f}(t) &= i\omega\, e^{i\omega t} &&= \omega\,[-\sin(\omega t) + i\cos(\omega t)] \\
\ddot{f}(t) &= -\omega^2\, e^{i\omega t} &&= \omega^2\,[-\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \\
f^{(3)}(t) &= -i\omega^3\, e^{i\omega t} &&= \omega^3\,[\sin(\omega t) - i\cos(\omega t)] \\
f^{(4)}(t) &= \omega^4\, e^{i\omega t} &&= \omega^4\,[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \quad = \omega^4 f(t)
\end{aligned}$$

Die obere Zeichnung zeigt von innen nach außen den Verlauf der Funktion und ihrer Ableitungen ansteigender Ordnung in der komplexen Zahlenebene für Zeiten $t \geqslant 0$. Der Zeitnullpunkt $t = 0$ ist jeweils durch einen Punkt gekennzeichnet.

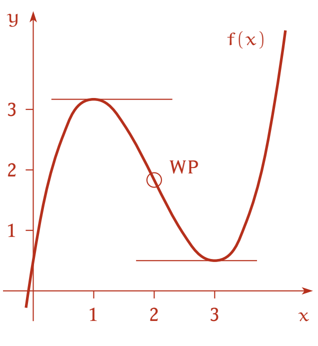


- Mit einem Minuszeichen im Exponenten gilt entsprechend (untere Abbildung)

$$\begin{aligned}
g(t) &= e^{-i\omega t} &&= \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \\
\dot{g}(t) &= -i\omega\, e^{-i\omega t} &&= \omega\,[-\sin(\omega t) - i\cos(\omega t)] \\
\ddot{g}(t) &= -\omega^2\, e^{-i\omega t} &&= \omega^2\,[-\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \\
g^{(3)}(t) &= i\omega^3\, e^{-i\omega t} &&= \omega^3\,[\sin(\omega t) + i\cos(\omega t)] \\
g^{(4)}(t) &= \omega^4\, e^{-i\omega t} &&= \omega^4\,[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \\
&= \omega^4\, g(t)
\end{aligned}$$

4.7 Anwendungen: Kurvendiskussion, Extremwertprobleme

4.7.1 Extremwerte und Wendepunkte einer Funktion



- Die **Extremwerte** sind die lokalen Minima und Maxima einer Funktion. An ihnen verläuft die Tangente des Funktionsgraphen **waagerecht**. Folglich findet man die Extremwerte, indem man die **Nullstellen der ersten Ableitung** berechnet.
- Ob ein Extremwert ein lokales Minimum oder Maximum ist, lässt sich mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen. In der Umgebung eines **Minimums** nimmt die Steigung von negativen Werten über Null zu positiven Werten zu, d. h. die **zweite Ableitung ist dort positiv**. Entsprechend ist die zweite Ableitung an einem **lokalen Maximum negativ**.
- An den **Wendepunkten (WP)** ändert die Steigung der ersten Ableitung ihr Vorzeichen. Die Wendepunkte sind daher die **Nullstellen der zweiten Ableitung**, vorausgesetzt, die erste Ableitung ist dort ungleich Null.

- Falls an einem Punkt sowohl die erste als auch die zweite Ableitung Null ist, können verschiedene Fälle vorliegen: entweder ein Extremum (Beispiel: $y = x^4$: lokales Minimum bei $x_0 = 0$) oder ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Beispiel: $y = x^3$ für $x_0 = 0$). Zur Unterscheidung muss man höhere Ableitungen heranziehen. Dies soll hier nicht im Detail behandelt werden.

4.7.2 Beispiel 1: Polynom dritten Grades

- Der Graph im obigen Diagramm gehört zu der Funktion

$$y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + \frac{1}{2}$$

1. Ableitung:

$$y' = 2x^2 - 8x + 6$$

2. Ableitung:

$$y'' = 4x - 8$$

- Die Extremwerte (Nullstellen der ersten Ableitung) liegen bei

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3$$

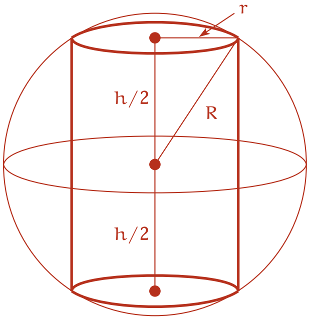
mit

$$\begin{aligned} y''(x_1) &= -4 < 0 && \hookrightarrow \quad \text{Maximum} \\ y''(x_2) &= +4 > 0 && \hookrightarrow \quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

- Der einzige Wendepunkt der Funktion liegt bei

$$x_{WP} = 2$$

4.7.3 Beispiel 2: Aufgabe aus der Geometrie



Bestimme die Höhe desjenigen in eine Kugel mit gegebenem Radius R einbeschriebenen Kreiszylinders, der das größtmögliche Volumen besitzt.

- Wir nennen h die Höhe und r den Radius des einbeschriebenen Zylinders. Sein Volumen beträgt

$$V_{\text{Zyl.}} = r^2 \pi h$$

- Aufgrund der Bedingung, dass der Zylinder der Kugel einbeschrieben ist, sind h und r nicht voneinander unabhängig:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \qquad \hookrightarrow \qquad r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

- Damit kann das Zylindervolumen als Funktion von h als einziger Variabler ausgedrückt werden:

$$V_{Zyl.}(h) = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)\pi h = R^2\pi h - \frac{\pi}{4}h^3$$
$$\frac{d}{dh}V_{Zyl.}(h) = R^2\pi - \frac{3\pi}{4}h^2$$
$$\frac{d^2}{dh^2}V_{Zyl.}(h) = -\frac{3\pi}{2}h$$

- Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$\boxed{h_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}R}$$

Die zweite Ableitung von $V_{Zyl.}(h)$ ist für alle positiven h-Werte negativ, so dass es sich wirklich um ein Maximum handelt.

4.8 Funktionen mehrerer Veränderlicher: partielle Ableitungen

4.8.1 Grundlagen

- Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, wie etwa

$$y = f(x,z) \tag{4.52}$$

Ein Beispiel aus der Physik ist der Druck einer abgeschlossenen Gasmenge, $p = p(V,T)$, wenn sowohl das Volumen V als auch die Temperatur T veränderlich sind; vgl. Abschnitt 3.2.1.

- Der **Zuwachs** des Funktionswertes lässt sich berechnen, wenn jeweils eine der Variablen einen vorgegebenen Zuwachs erfährt und alle anderen konstant gehalten werden. In unserem Beispiel $y = f(x,z)$ liefert das

$$\Delta_x y = f(x+\Delta x,z) - f(x,z) \qquad z \text{ fest} \tag{4.53}$$
$$\Delta_z y = f(x,z+\Delta z) - f(x,z) \qquad x \text{ fest} \tag{4.54}$$

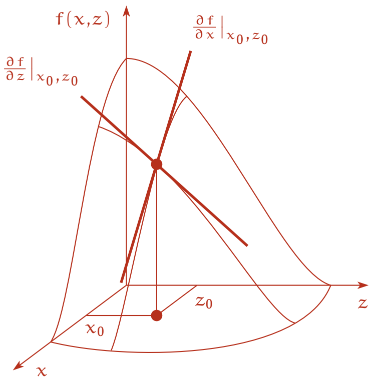
- Ebenso wie bei einer Variablen teilen wir diese Werte durch Δx bzw. Δz und lassen dann diese Zuwächse gegen Null streben:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x,z) - f(x,z)}{\Delta x} \tag{4.55}$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta_z y}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(x,z+\Delta z) - f(x,z)}{\Delta z} \tag{4.56}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$ etc.

- Die Ausdrücke $\partial y/\partial x$ und $\partial y/\partial z$ heißen die **partiellen Ableitungen** der Funktion $y = f(x,z)$. Das Symbol ∂ ersetzt in diesem Fall das d als Kennzeichen einer infinitesimal kleinen Größe. Formal gelten für partielle Ableitungen die gleichen Rechenregeln wie für gewöhnliche. **Dabei behandelt man alle Variablen bis auf diejenige, nach der abgeleitet wird, als Konstanten.**

4.8.2 Anschauliche Bedeutung



- Eine Funktion von zwei Variablen kann graphisch als **Fläche in einem dreidimensionalen Koordinatensystem** dargestellt werden, dessen Achsen die beiden Veränderlichen und den Funktionswert repräsentieren. Entsprechend ergibt sich bei n Variablen eine **Hyperfläche in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum**; eine anschauliche Vorstellung ist für $n > 2$ nicht mehr möglich.

- Die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x|_{x_0,z_0}$ und $\partial f/\partial z|_{x_0,z_0}$ geben die Steigung der beiden Linien auf der Funktionsfläche im Punkt $(x_0; z_0)$ an, für die jeweils eine der beiden Variablen konstant ist (z_0 bzw. x_0) und die sich in diesem Punkt schneiden.

4.8.3 Beispiel 1: Druck einer abgeschlossenen Gasmenge

In Abschnitt 3.2.1 hatten wir den Druck einer abgeschlossenen Gasmenge von 1 mol als Funktion des zur Verfügung stehenden Volumens V und der Temperatur T beschrieben:

$$p = p(V,T) = R\,\frac{T}{V}$$

R ist die allgemeine Gaskonstante. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}$$
$$\frac{\partial p}{\partial V} = -R\,\frac{T}{V^2}$$

4.8.4 Beispiel 2: ebene Wellen

- Wellen sind Schwingungsphänomene, die sich im Raum ausbreiten. Die einfachste Art sind ebene Wellen in einem isotropen Medium. Bei ihnen verlaufen die Wellenfronten, d. h. die Orte konstanter Phasenlage der Welle, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und sind unendlich ausgedehnt.

- Eine ebene Welle in x-Richtung kann durch den folgenden komplexen Ausdruck beschrieben werden, dessen physikalisch bedeutsame Komponente der **Realteil** ist (vgl. Abschnitt 6.3).

  $$A(x,t) = A_0 \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$$

  Der komplexe Ausdruck wird oft bevorzugt, weil man mit Exponentialfunktionen leicht rechnen kann.

- $A(x,t)$ ist die **Amplitude**, d. h. Auslenkung der Welle, als Funktion von Ort und Zeit (bei Wasserwellen z. B. die Höhe der gewellten Wasseroberfläche, bei elektromagnetischen Wellen die elektrische oder magnetische Feldstärke). A_0 ist die Maximalamplitude, $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl oder der Betrag des Wellenvektors und $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz (λ: Wellenlänge, ν: gewöhnliche Frequenz). Der Ausdruck $kx - \omega t$ wird als **Phase** der Welle bezeichnet; ω/k ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

- Bei der Beschreibung von Wellenerscheinungen sind die partiellen Ableitungen der Amplitude nach Ort und Zeit wichtig:

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = ik\,A_0\ \exp\left[i(kx-\omega t)\right] = ik\,A(x,t)$$
$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} = -i\omega\,A_0\ \exp\left[i(kx-\omega t)\right] = -i\omega\,A(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\,A_0\ \exp\left[i(kx-\omega t)\right] = -k^2\,A(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\,A_0\ \exp\left[i(kx-\omega t)\right] = -\omega^2\,A(x,t)$$

- Der Vorfaktor i bzw. $-i$ bei den ersten Ableitungen deutet an, dass diese gegenüber $A(x,t)$ um $\pm\pi/2$ **phasenverschoben** sind. Grund: $\pm i = \exp(\pm i\pi/2)$. Das Minuszeichen der zweiten Ableitungen kennzeichnet die Phasenverschiebung um π (vgl. Abschnitt 4.6.3).

4.8.5 Beispiel 3: der Gradient

- Wir betrachten eine ortsabhängige Funktion $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$. Der **Gradient** von f ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen der Funktion nach den drei Ortskoordinaten sind.[2] Er zeigt in die Richtung der **stärksten Änderung** von f. Schreibweise:

grad $f = \vec{\nabla} f$

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f \tag{4.57}$$

Das Symbol $\vec{\nabla}$ heißt **Nabla-Operator**; es bezeichnet einen Vektor, in dessen Komponenten die Ortsableitungen der Funktion stehen, auf die der Operator angewandt wird (hier: f).

- **Spezialfall: Funktion mit Kugelsymmetrie.** Die Berechnung des Gradienten ist besonders einfach, wenn die Funktion nicht explizit von allen drei Ortskoordinaten, sondern nur vom Abstand r vom Koordinatenursprung abhängt, d. h. $f = f(r)$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.58}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{2x}{2r} = \frac{x}{r}\cdot\frac{df}{dr} \tag{4.59}$$

Analog

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\cdot\frac{df}{dr} \tag{4.60}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\cdot\frac{df}{dr} \tag{4.61}$$

[2] Manchmal bezeichnet man — mathematisch nicht ganz korrekt — auch die Ableitung einer Funktion nach einer einzigen Raumkoordinate oder sogar nach der Zeit als räumlichen bzw. zeitlichen Gradienten der Funktion.

Damit erhält man

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{df}{dr} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{df}{dr} \cdot \hat{e}_r} \tag{4.62}$$

$\operatorname{grad} f = \frac{df}{dr} \cdot \hat{e}_r$
bei Kugelsymmetrie

In diesem Fall ist der Gradient an jedem Ort parallel zum zugehörigen Ortsvektor, d. h. er zeigt radial vom Ursprung weg oder zu ihm hin, je nach Vorzeichen von df/dr.

- Beispiel: Die **elektrische Feldstärke** ist der negative Gradient des elektrischen Potentiales:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

Das Potential in der Umgebung einer Punktladung Q ist zentrosymmetrisch und hat den Wert

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Der Betrag der zugehörigen Feldstärke lautet

$$E(r) = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

(vgl. Abschnitt 4.1.5). Aus Gl. (4.62) folgt, dass der Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ überall zur Ladung hin oder von ihr weg zeigt.

- Man kann den Gradienten auch in Kugelkoordinaten (oder einem anderen Koordinatensystem) angeben, so dass seine Komponenten die partiellen Ableitungen nach r, θ und ϕ enthalten. Das soll hier nicht behandelt werden.

4.9 Das Differential

- Es sei $y = f(x)$ eine Funktion der unabhängigen Variablen x. Am Anfang dieses Kapitels waren endlich große Zuwächse $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ der unabhängigen Variablen bzw. des Funktionswertes betrachtet worden. Der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$ gibt die mittlere Steigung des Funktionsgraphen im Intervall $(x_1; x_2)$ an. Er geht im Grenzfall $\Delta x \to 0$ in den Differentialquotienten oder die Ableitung

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{4.63}$$

an der Stelle x über und beschreibt die Steigung des Funktionsgraphen an diesem Punkt. Für $\Delta x \to 0$ wird $x_1 = x_2 = x$.

- Oft ist es von Interesse, wie der Funktionswert an der Stelle x variiert, wenn man die Variable nur um einen infinitesimal kleinen Wert dx ändert. Man nennt eine solche kleine Änderung das **Differential** von x. Da $y'(x)$ die Steigung der Funktion an der Stelle x ist, folgt für ihr Differential

$dy = y'(x)\, dx$

$$\boxed{dy = y'(x)\, dx} \tag{4.64}$$

Man kann also formal Gl. (4.63) mit dx multiplizieren.

$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial z}\,dz$ etc.

- Wenn eine Funktion von mehreren voneinander unabhängigen Variablen abhängt, wird Gl. (4.64) mit Hilfe der partiellen Ableitungen verallgemeinert. Das Differential von $y = y(x,z)$ lässt sich z. B. schreiben als

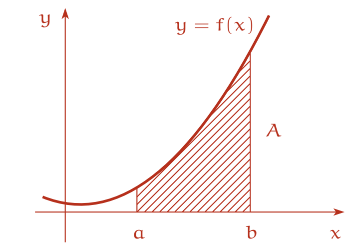
$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial z}\,dz} \tag{4.65}$$

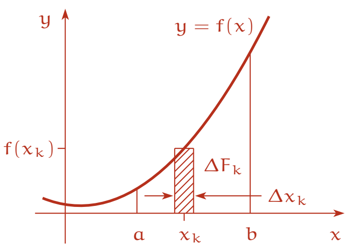
In diesem Fall heißt dy das **vollständige Differential** der Funktion $y(x,z)$.

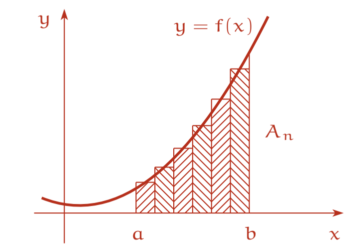
5 Integralrechnung

Das Grundproblem der Integralrechnung besteht in der **Berechnung einer Fläche**, die von der x-Achse und einem Funktionsgraphen — also i. A. **krummlinig** — begrenzt wird. Man nähert die gesuchte Fläche dadurch an, dass man sie in eine Vielzahl schmaler Rechtecke zerlegt, deren Fläche sich leicht berechnen lässt. Wenn man die Anzahl der Rechtecke gegen Unendlich und ihre Breite gegen Null streben lässt, erhält man als Grenzwert die gesuchte Fläche. Auch hier wird also mit **unendlich kleinen Größen** (d. h. Differentialen) gerechnet.

5.1 Einführung: das bestimmte Integral







- Die Aufgabe bestehe darin, die Fläche A zwischen einer durch die Funktion $f(x)$ beschriebenen Kurve und der x-Achse in einem gegebenen Intervall $[a; b]$ zu berechnen.
- Zur näherungsweisen Berechnung wird das Intervall in n Streifen mit den Breiten $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$ unterteilt, die jeweils um die Punkte x_k zentriert sind. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(x_k)$. Die Fläche der rechteckigen Flächenelemente beträgt damit $\Delta F_k = f(x_k)\,\Delta x_k$.
- Summiert man die Flächen aller dieser Rechtecke, so erhält man einen Näherungswert A_n für die wahre Fläche A. Die Näherung ist umso besser, je feiner das Intervall $[a; b]$ unterteilt wird, je größer also n ist.
- Im Grenzfall $n \to \infty$ strebt A_n gegen die wahre Fläche:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta F_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k \tag{5.1}$$

  Den Grenzwert nennt man das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b und schreibt

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.2}$$

  a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

- Gemäß Gl. (5.1) und (5.2) gilt

$$A = \int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.3}$$

  und damit für die Differentiale

$$\boxed{dF(x) = f(x)\,dx} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}} \tag{5.4}$$

  [vgl. Gl. (4.63), (4.64)].

- Die Berechnung der gesuchten Fläche führt auf das Problem, **zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine neue Funktion $F(x)$ zu finden, deren Ableitung gerade $f(x)$ ist**. Differentiation und Integration sind folglich zueinander inverse Rechenoperationen.
- Wie man die Fläche mit Hilfe von $F(x)$ berechnet, wird in Abschnitt 5.6 beschrieben. Zunächst wollen wir Regeln aufstellen, mit deren Hilfe man die Funktion $F(x)$ bestimmen kann.

5.2 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

- Das Ziel besteht zunächst darin, eine Funktion $F(x)$ zu finden, die die zu integrierende Funktion $f(x)$ als Ableitung hat:

$$F'(x) = f(x) \tag{5.5}$$

- $F(x)$ wird **unbestimmtes Integral** oder **Stammfunktion** von $f(x)$ genannt.
- Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dass zwei Funktionen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, identische Ableitungen haben. Daher kann eine Stammfunktion **nur bis auf eine additive Konstante** bestimmt werden. Man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5.6}$$

Integrationskonstante C

Die Konstante C heißt **Integrationskonstante** und kann **beliebig gewählt** werden. Die Funktion $f(x)$ ist der **Integrand**. Zur Kennzeichnung der Stammfunktion werden am Integralzeichen **keine Integrationsgrenzen** angegeben.

- Für elementare Funktionen $f(x)$ kann die Stammfunktion häufig auf Grund der Kenntnis der Differentiationsregeln “erraten” werden. Das ist legitim, wenn man das Ergebnis durch Ableiten nachprüft. Beispiele:

$$f(x) = x \quad \hookrightarrow \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$$

$$f(x) = \cos x \quad \hookrightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$$

$$f(x) = e^x \quad \hookrightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$$

5.3 Integrale elementarer Funktionen

5.3.1 Kleine Tabelle zum Nachschlagen

$$f(x) = a = \text{const.} \qquad \int a\,dx = ax + C \tag{5.7}$$

$$f(x) = x^n \qquad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad \boxed{n \neq -1} \tag{5.8}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \boxed{x \neq 0} \tag{5.9}$$

$$f(x) = \sin x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{5.10}$$

$$f(x) = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{5.11}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \tag{5.12}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C \tag{5.13}$$

$$f(x) = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x + C \tag{5.14}$$

$$f(x) = a^x \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C \tag{5.15}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \tag{5.16}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \tag{5.17}$$

5.3.2 Beispiele

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\,x^{1+1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,x^{1-1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int x^{5/3}\,dx = \frac{1}{1+\frac{5}{3}}\,x^{1+5/3} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C$$

5.4 Regeln für zusammengesetzte Funktionen

5.4.1 Summenregel

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx} \tag{5.18}$$

Zum Beweis beide Seiten ableiten.

5.4.2 Konstanter Vorfaktor

$$\boxed{\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx} \tag{5.19}$$

Zum Beweis beide Seiten ableiten.

5.4.3 Partielle Integration

Es gibt keine allgemeine Regel zum Integrieren von Produkten zweier oder mehrerer Funktionen. Falls aber der Integrand als Produkt einer Funktion mit der Ableitung einer zweiten geschrieben werden kann, gilt

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx} \tag{5.20}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist evtl. leichter zu lösen als das ursprüngliche. Die partielle Integrationsregel folgt aus der Produktregel für Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \hookrightarrow$$
$$\underbrace{\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)]\,dx}_{f(x) \cdot g(x)} = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

5.4.4 Integration mittels Substitution

Ein Integral habe die Form

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$$

Dann können wir eine Substitutionsvariable $u = g(x)$ definieren mit dem Differential $du = g'(x)\,dx$. Daraus folgt

$$\boxed{\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du} \tag{5.21}$$

Diese Formel folgt aus der Kettenregel der Differentialrechnung: Es sei $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, d. h. $dF/du = f(u)$. Ihre Ableitung nach x ergibt

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{dg}{dx} = f(u)\,g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

Die Integration des ersten und des letzten Ausdruckes über x liefert die Substitutionsregel [Gl. (5.21)]:

$$\int \frac{dF}{dx}\,dx = F(u) + C = \int f(u)\,du = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$$

5.5 Beispiele

5.5.1 Summenregel und konstanter Vorfaktor

$$\int 3\cos x\,dx = 3\sin x + C$$

$$\int \pi\, e^x\,dx = \pi\, e^x + C$$

$$\int \left(x^{27} + \sin x\right) dx = \frac{1}{28}\,x^{28} - \cos x + C$$

$$\int \left[A\left(3x^2 + B\right)^2 + \cos x\right] dx = \frac{9}{5}\,Ax^5 + 2ABx^3 + AB^2x + \sin x + C$$

5.5.2 Partielle Integration

$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)}\,dx = ?$$

$$g(x) = x; \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \hookrightarrow$$

$$\int \ln x\,dx = x\,\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = \boxed{x\,(\ln x - 1) + C}$$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\;\underbrace{\sin x}_{g'(x)}\,dx = ?$$

$$g(x) = -\cos x; \quad f'(x) = 1 \quad \hookrightarrow$$

$$\int x\,\sin x\,dx = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = \boxed{-x\,\cos x + \sin x + C}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\;\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = ?$$

$$g(x) = e^x; \quad f'(x) = 2\,x \quad \hookrightarrow$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\int \underbrace{x}_{f(x)}\;\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx$$

$$g(x) = e^x; \quad f'(x) = 1 \quad \hookrightarrow$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) = \boxed{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C}$$

Hier wurde die partielle Integrationsregel zweimal angewandt.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx = ?$$

$$g(x) = \sin x; \quad f'(x) = -\sin x \quad \hookrightarrow$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \, \cos x - \int (-\sin x) \sin x \, dx =$$

$$\sin x \, \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

Die beiden Integrale der Funktion $\cos^2 x$ links und rechts des Gleichheitszeichens können zusammengefasst werden:

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \, \cos x + x + C^* \quad \hookrightarrow$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \, \cos x + x + C^*) = \boxed{\frac{1}{4} \sin (2x) + \frac{1}{2} x + C}$$

Im letzten Schritt wurde wieder eines der Additionstheoreme verwendet ($C^* = 2C$).

5.5.3 Integration mittels Substitution

$$\int 3 \, e^{3x} \, dx = ?$$

$$\text{Subst.: } 3x = u; \quad 3 \, dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int 3 \, e^{3x} \, dx = \int e^u \, du = e^u + C = \boxed{e^{3x} + C}$$

$$\int e^{-i\omega t} \, dt = ?$$

$$\text{Subst.: } -i\omega t = u; \quad -i\omega \, dt = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int e^{-i\omega t} \, dt = \frac{i}{\omega} \int e^u \, du = \frac{i}{\omega} e^u + C = \boxed{\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} + C}$$

$$\int x^2 \cos \left(x^3\right) \, dx = ?$$

$$\text{Subst.: } x^3 = u; \quad 3x^2 \, dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int x^2 \cos \left(x^3\right) \, dx = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + C = \boxed{\frac{1}{3} \sin \left(x^3\right) + C}$$

$$\int (3x + 7)^{27} \, dx = ?$$

$$\text{Subst.: } 3x + 7 = u; \quad 3 \, dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int (3x+7)^{27}\,dx = \frac{1}{3}\int u^{27}du = \frac{1}{84}\,u^{28} + C = \boxed{\frac{1}{84}\,(3x+7)^{28} + C}$$

$$\int \left(x^3+2\right)^2 \cdot 3x^2\,dx = ?$$

$$\text{Subst.: } x^3 + 2 = u; \quad 3x^2\,dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int \left(x^3+2\right)^2 \cdot 3x^2\,dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}\,u^3 + C = \boxed{\frac{1}{3}\left(x^3+2\right)^3 + C}$$

Das Integral kann auch durch Ausmultiplizieren der Klammer oder partielle Integration gelöst werden. Substitution ist das schnellste Verfahren.

$$\int \frac{dx}{x\,\ln x} = ?$$

$$\text{Subst.: } \ln x = u; \quad \frac{1}{x}\,dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x\,\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|\ln x| + C}$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = ?$$

$$\text{Subst.: } \sin x = u; \quad \cos x\,dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|\sin x| + C}$$

$$\int \sin^3 x\,dx = ?$$

Wegen des Differentiales muss man hier $\cos x$, nicht $\sin x$ substituieren:

$$\text{Subst.: } \cos x = u; \quad -\sin x\,dx = du \quad \hookrightarrow$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx = -\int \left(1-u^2\right)du =$$

$$\int \left(u^2-1\right)du = \frac{1}{3}\,u^3 - u + C = \boxed{\frac{1}{3}\,\cos^3 x - \cos x + C}$$

5.5.4 Abschließende Bemerkungen

- Die Beispiele — insbesondere das letzte — haben gezeigt, dass bei der Berechnung unbestimmter Integrale der Lösungsweg, der am schnellsten zum Ziel führt, nicht immer auf den ersten Blick zu erkennen ist. Den optimalen Lösungsweg zu finden, ist Übungssache. Es gibt kein allgemein gültiges Rezept.

Nicht alle Integrale sind lösbar!

- Hinzu kommt, dass nicht jedes Integral in geschlossener Form lösbar ist. Gegenbeispiel:

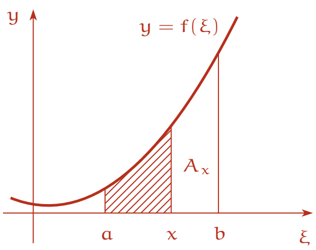
$$F(x) = \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

Man kann den Integranden nur in seine Potenzreihe entwickeln und diese Term für Term integrieren.

- Viele Integrale findet man in mathematischen Formelsammlungen, z. B. Bronstein, Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch.

5.6 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

5.6.1 Flächenberechnung mit Hilfe der Stammfunktion



- Wir hatten das bestimmte Integral zum Zweck der Flächenberechnung eingeführt: zu berechnen war die Fläche unter dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen a und b (vgl. Abschnitt 5.1).

- Zunächst betrachten wir nur einen Teil A_x dieser Fläche, der zwischen a und einem Wert x (mit $a < x < b$) liegt.

$$A_x = \int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^x dF(\xi) = F(x) + C \tag{5.22}$$

Da x hier eine der Integrationsgrenzen ist, wurde die Variable in ξ umbenannt.

- Bei der Verschiebung von x ändert sich die Fläche; folglich muss die Stammfunktion F auf der rechten Seite x als Argument haben.

- Wenn wir x zur linken Integrationsgrenze a verschieben, geht die Fläche gegen Null:

$$\lim_{x\to a} A_x = \lim_{x\to a} \int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(a) + C = 0 \tag{5.23}$$

Die Integrationskonstante ist also mit dem Wert der Stammfunktion an der Stelle a verknüpft:

$$\boxed{C = -F(a)} \tag{5.24}$$

- Die Fläche zwischen den Grenzen a und x beträgt dann nach Gl. (5.22) und (5.24)

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) - F(a) \tag{5.25}$$

und entsprechend die gesamte Fläche zwischen a und b

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.26}$$

- Konsequenz: **wenn irgendeine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ mit beliebiger Integrationskonstante C bekannt ist, ergibt sich das bestimmte Integral zu**

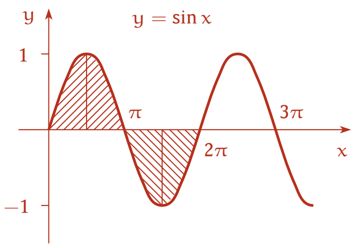
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)} \tag{5.27}$$

- Beispiel:

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)}$$

- Beachte:
  - Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ gerechnet.
  - Das Vorzeichen einer Fläche kehrt sich um, wenn die obere Integrationsgrenze links von der unteren liegt.

5.6.2 Beispiel: Sinus-Funktion



$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Die Fläche unter einem Sinus-Bogen hat den glatten Wert 2 Flächeneinheiten. Analog:

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos\pi = -1 - 1 = -2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

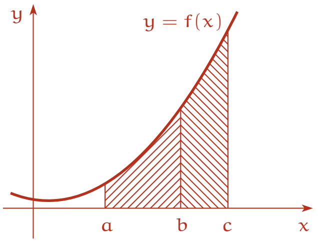
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0$$

Die Integrationskonstante kann beim Berechnen bestimmter Integrale weggelassen (bzw. gleich Null gesetzt) werden, weil sie beim Einsetzen der Integrationsgrenzen ohnehin herausfällt.

5.7 Regeln für bestimmte Integrale

Die meisten dieser Regeln sind anschaulich klar oder ergeben sich zwanglos aus jenen für unbestimmte Integrale. Einzig die Substitutionsregel verlangt etwas Aufmerksamkeit, weil sich **bei der Substitution die Integrationsgrenzen ändern**.

5.7.1 Aneinanderreihen von Teilflächen



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{5.28}$$

und umgekehrt

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.29}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{5.30}$$

(anschaulich klar).

5.7.2 Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{5.31}$$

5.7.3 Ableitung nach einer Integrationsgrenze

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \frac{d}{dx}\left[F(x) - F(a)\right] = f(x) \tag{5.32}$$

5.7.4 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx \tag{5.33}$$

Hier bedeutet wiederum

$$f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)$$

5.7.5 Integration mittels Substitution

$$\int_a^b f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \tag{5.34}$$

Beispiel:

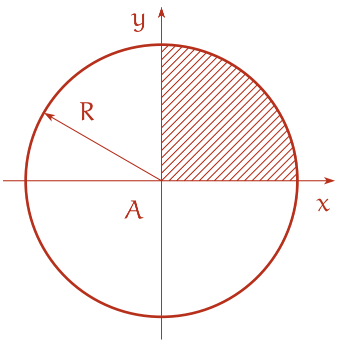
$$\int_1^2 \exp(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int_3^6 \exp(u)\,du = \frac{1}{3}\exp(u)\Big|_3^6 = \frac{1}{3}\left(e^6 - e^3\right)$$

oder

$$\int_1^2 \exp(3x)\,dx = \frac{1}{3}\exp(3x)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(e^6 - e^3\right)$$

Achtung: wenn man nach dem Berechnen der Stammfunktion die neue Variable beibehält, ändern sich die Integrationsgrenzen! Wenn man dagegen zurück substituiert, müssen die ursprünglichen Grenzen eingesetzt werden.

5.7.6 Beispiel: Kreisfläche



- Lege den Koordinatenursprung in den Kreismittelpunkt. Es genügt, die Fläche des Viertelkreises im ersten Quadranten zu berechnen und das Ergebnis mit vier zu multiplizieren.
- Die Gleichung für die Kreislinie lautet:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \hookrightarrow \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

für $0 \leqslant x \leqslant R$.

- Die Kreisfläche beträgt also

$$A_{\text{Kreis}} = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\,R \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx$$

$$\text{Subst.: } \frac{x}{R} = \sin u; \quad dx = R\cos u\, du \quad \hookrightarrow$$

$$A_{\text{Kreis}} = 4\,R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u}\, \cos u\, du = 4\,R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du$$

$$= 4\,R^2 \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2\,u)\right]_0^{\pi/2}$$

(vgl. das letzte Beispiel in Abschnitt 5.5.2)

$$A_{\text{Kreis}} = 4\,R^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{R^2\pi}$$

- Die Berechnung der Kreisfläche auf diesem Weg ist kompliziert. Vor Allem die benötigte Substitution ist hier nicht auf den ersten Blick zu erkennen. Die Rechnung wird erheblich einfacher und kürzer, wenn man sie — der Geometrie des Problemes entsprechend — nicht in kartesischen, sondern in Polarkoordinaten durchführt; siehe Abschnitt 5.9.2.

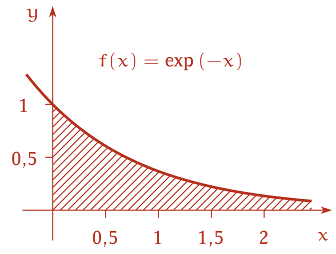
5.8 Unendliche Integrationsgrenzen

- Zu berechnen sei ein Integral mit **unendlicher oberer Integrationsgrenze**:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = ?$$

- Lösung: man ermittelt das Ergebnis für eine **endliche** obere Grenze b und bildet anschließend den Grenzwert für $b \to \infty$:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{5.35}$$



- Beispiel: Exponentialfunktion

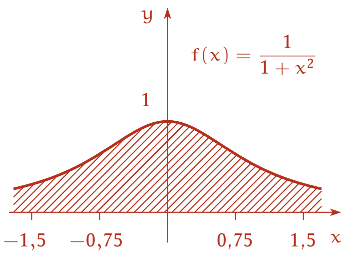
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = \boxed{1}$$

Die unendlich langgezogene, immer schmaler werdende Fläche zwischen den Koordinatenachsen und dem Graphen der Exponentialfunktion hat den glatten Wert 1 Flächeneinheit.

- Wenn die untere Integrationsgrenze im negativ Unendlichen liegt, verfährt man analog:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.36}$$



- Einfaches Beispiel mit zwei unendlichen Integrationsgrenzen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}$$

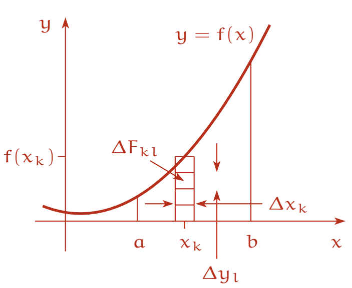
Die durch den Integranden beschriebene glockenförmige Kurve heißt "Lorentz-Kurve"; sie spielt bei der Emission und Absorption von elektromagnetischen Wellen (z. B. Licht) eine wichtige Rolle. Die Fläche unter ihr beträgt π Flächeneinheiten.

5.9 Flächenintegrale in Polarkoordinaten

5.9.1 Motivation: das Flächendifferential in kartesischen Koordinaten

- Ziel der Integralrechnung ist die Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(x)$. Bisher war sie in schmale Rechtecke der Breite Δx_k und Höhe $f(x_k)$ unterteilt worden. Die Fläche unter dem Graphen ergibt sich als Summe der Rechteckflächen $\Delta F_k = f(x_k)\,\Delta x_k$ für $\Delta x_k \to 0$.

- Die zu berechnende Fläche lässt sich noch weiter zerlegen, indem man jedes schmale Flächenelement aus kurzen, übereinander angeordneten Rechtecken der Höhe Δy_l (und Breite Δx_k) aufbaut. Wenn Δx_k und Δy_l gegen Null gehen, führt das zu **zwei** Integrationen:



$$A = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b dx\; y\Big|_0^{f(x)} = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.37}$$

Das (triviale) y-Integral ist hier zuerst zu berechnen, weil sein Ergebnis den Integranden der x-Integration ergibt.

- Ein kleines (aber noch endlich großes) rechteckiges Flächenelement in kartesischen Koordinaten hat also die Größe

$$\Delta F_{kl} = \Delta x_k\,\Delta y_l \tag{5.38}$$

und das **Flächendifferential** beträgt

$dF = dx\,dy$

$$dF = dx\,dy \tag{5.39}$$

- Damit können formal beliebig geformte Flächen in ebenen kartesischen Koordinaten als **Doppelintegral** längs der Koordinatenachsen dargestellt werden:

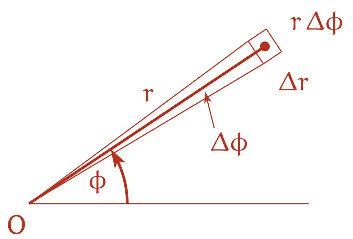
$$\boxed{A = \iint\limits_{(A)} dx\,dy} \tag{5.40}$$

Die Integrationen sind innerhalb der Begrenzungslinie von A auszuführen [durch (A) unterhalb der Integralzeichen angedeutet].

- Einfaches Beispiel: die Fläche eines Rechteckes mit der Breite B in x-Richtung und der Länge L in y-Richtung beträgt

$$A_{\text{Rechteck}} = \int_0^B dx \int_0^L dy = x\Big|_0^B \, y\Big|_0^L = \boxed{B\,L}$$

5.9.2 Übergang zu Polarkoordinaten



- Die Aussage, dass eine beliebige Fläche aus kleinen rechteckigen Elementen zusammengesetzt werden kann, gilt auch in einem Polarkoordinatensystem. Wir betrachten einen Ort $\vec{r} = (r; \phi)$.
- Ein kleiner Längenzuwachs in radialer Richtung beträgt Δr.
- Senkrecht dazu ist ein kleiner Winkelzuwachs $\Delta\phi$ mit einem Längenelement $r\,\Delta\phi$ verknüpft.
- Daraus ergibt sich das **Flächendifferential in Polarkoordinaten**

$dF = r\,dr\,d\phi$

$$dF = r\,dr\,d\phi \tag{5.41}$$

Die Krümmung des Längenelementes $r\,d\phi$ spielt bei infinitesimalen Größen keine Rolle. Eine beliebige Fläche lässt sich folglich schreiben als

$$\boxed{A = \iint\limits_{(A)} r\,dr\,d\phi} \tag{5.42}$$

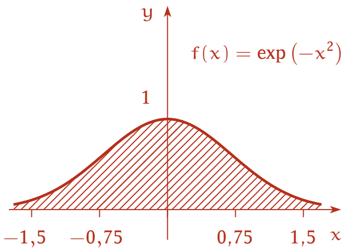
- Beispiel: die Fläche eines Kreises mit Radius R berechnet sich in Polarkoordinaten sehr einfach zu

$$A_{\text{Kreis}} = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \boxed{R^2\pi}$$

5.9.3 Anwendung: die Fläche unter einer Gauß-Kurve

- Die Gaußsche Normalverteilung spielt eine wichtige Rolle für die Beschreibung der statistischen Schwankungen von Daten, z. B. Messwerten, um einen Mittelwert. In ihrer einfachsten Form lautet sie

$$f(x) = \exp\left(-x^2\right) \tag{5.43}$$



- Ihr Graph ist eine Glockenkurve, ähnlich wie der Graph der Lorentz-Funktion, fällt im Vergleich zu diesem aber wesentlich schneller in den Flanken ab (vgl. S. 66). Ihre Stammfunktion, das Gaußsche Fehlerintegral, lässt sich nicht in geschlossener Form angeben; man kann sie nur als Potenzreihe darstellen. Dennoch kann das bestimmte Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ analytisch berechnet werden. Zu diesem Zweck schreiben wir das Integral zweimal an, wobei wir einmal x und einmal y als Integrationsvariable verwenden:

$$A_{\text{Gauß}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-y^2\right) dy \tag{5.44}$$

- Die Multiplikation der beiden Ausdrücke liefert

$$A^2_{\text{Gauß}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \exp - \left[\left(x^2 + y^2\right)\right] \tag{5.45}$$

- Die Variablen x und y können als kartesische Koordinaten einer Ebene aufgefasst werden, wobei über die gesamte Ebene zu integrieren ist. Der Übergang zu Polarkoordinaten mit $x^2+y^2 = r^2$ liefert

$$A^2_{\text{Gauß}} = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} dr \, r \, \exp\left(-r^2\right) \tag{5.46}$$

- Mit der Substitution $r^2 = u$ lässt sich das Integral über r leicht lösen (vgl. S. 66); man erhält

$$A^2_{\text{Gauß}} = 2\pi \frac{1}{2}; \qquad \text{also} \quad A_{\text{Gauß}} = \boxed{\sqrt{\pi}}$$

  Wegen des schnelleren Abfalles ist die Fläche kleiner als die Fläche unter einer Lorentz-Kurve gleicher Maximalhöhe.

5.10 Volumenintegrale

Ebenso wie Flächen lassen sich auch Volumina gegebener Körper durch Integration berechnen, wenn man sie aus **kleinen quaderförmigen Volumenelementen** zusammensetzt. Da wir uns jetzt im dreidimensionalen Raum befinden, erfordert dies **drei** Integrationen entlang der drei Raumkoordinaten.

5.10.1 Kartesische Koordinaten

- Ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem erhält man aus einem zweidimensionalen, indem man senkrecht zur $x\,y$-Ebene die z-Achse als dritte Koordinatenachse hinzunimmt.
- Folglich lautet das **Volumendifferential** in kartesischen Koordinaten einfach

$dV = dx\,dy\,dz$

$$dV = dx\,dy\,dz \tag{5.47}$$

und das gesuchte Volumen berechnet sich gemäß

$$\boxed{V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz} \tag{5.48}$$

- Beispiel: das Volumen eines Quaders der Breite B (entlang der x-Achse), Länge L (entlang der y-Achse) und Höhe H (entlang der z-Achse) beträgt

$$V_{\text{Quader}} = \int\limits_0^B dx \int\limits_0^L dy \int\limits_0^H dz = x\Big|_0^B \; y\Big|_0^L \; z\Big|_0^H = \boxed{B\,L\,H}$$

5.10.2 Zylinderkoordinaten

- Zylinderkoordinaten erhält man aus ebenen Polarkoordinaten, indem man wiederum die z-Achse senkrecht zur $\rho\,\phi$-Ebene hinzufügt (vgl. Abschnitt 1.3.2).
- Das Volumendifferential ergibt sich daher auch hier zwanglos aus dem Flächendifferential in Polarkoordinaten:

$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$

$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz \tag{5.49}$$

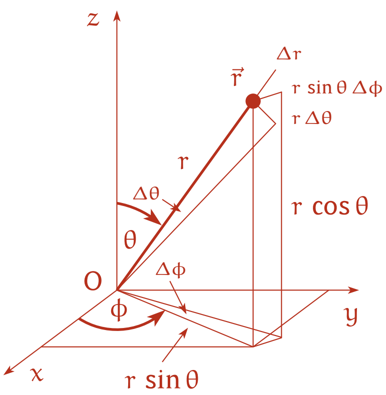
und die Formel für das Volumen lautet

$$\boxed{V = \iiint\limits_{(V)} \rho\,d\rho\,d\phi\,dz} \tag{5.50}$$

- Beispiel: Volumen eines geraden Kreiszylinders mit Radius R und Höhe H:

$$V_{\text{Zylinder}} = \int\limits_0^R \rho\,d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^H dz = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi \cdot H = \boxed{R^2 \pi H}$$

5.10.3 Kugelkoordinaten



- Wir betrachten ein kleines, aber noch endlich großes quaderförmiges Volumenelement ΔV am Ort $\vec{r} = (r;\, \theta;\, \phi)$ in Kugelkoordinaten. Es wird von den folgenden Zuwachs-Längen aufgespannt:
- Der Zuwachs in radialer Richtung ist Δr.
- Der Zuwachs in tangentialer Richtung für konstantes ϕ, der mit einer Winkelzunahme $\Delta\theta$ verknüpft ist, beträgt $r\,\Delta\theta$.
- Der Zuwachs in tangentialer Richtung senkrecht dazu (d. h. für konstantes θ), der mit einer Winkelzunahme $\Delta\phi$ verknüpft ist, beträgt $r\,\sin\theta\,\Delta\phi$. Er entspricht dem Zuwachs $\rho\,\Delta\phi$ in Zylinderkoordinaten.
- Durch Multiplikation dieser Zuwachs-Längen und Übergang zu infinitesimalen Größen erhält man das Volumendifferential

$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{5.51}$$

und damit die Formel für das Volumen

$$\boxed{V = \iiint_{(V)} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi} \tag{5.52}$$

- Beispiel: das Volumen einer Kugel mit Radius R beträgt

$$V_{\text{Kugel}} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

Beachte: um das gesamte Kugelvolumen abzudecken, muss der **Polarwinkel θ von 0 bis π** (d. h. vom Nordpol über den Äquator bis zum Südpol der Kugel) laufen und der **Azimutwinkel ϕ über den vollen Längengradbereich von 0 bis 2π**.

5.10.4 Integrale über die Kugeloberfläche, Raumwinkel

- Die Oberfläche einer Kugel kann berechnet werden, indem man $r = R = \text{const.}$ setzt und nur über die Winkel integriert. Dazu wird zunächst das entsprechende Flächenelement in Kugelkoordinaten definiert:

$dA = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$dA = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{5.53}$$

Das Längendifferential dr kommt hier wegen $r = \text{const.}$ nicht vor. Die Integration über die Kugeloberfläche lautet dann

$$\boxed{A_{K-Ofl} = R^2 \iint_{(A)} \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \tag{5.54}$$

mit dem Ergebnis

$$A_{K-Ofl} = R^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = \boxed{4\pi R^2}$$

Raumwinkelelement $d\Omega$

- Das Oberflächenelement der **Einheitskugel** (d. h. einer Kugel mit Radius $R = 1$) nennt man auch **Raumwinkelelement $d\Omega$** und schreibt

$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{5.55}$$

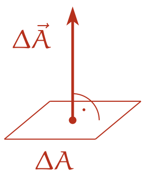
Die Integration über einen Raumwinkelbereich Ω lautet also

$$\boxed{\Omega = \iint_{(\Omega)} \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \tag{5.56}$$

Für den vollen Raumwinkelbereich (d. h. die gesamte Oberfläche der Einheitskugel) erhält man das Ergebnis 4π.

- Beispiel: der **elektrische Fluss** einer Punktladung durch eine Kugeloberfläche. Wir setzen eine elektrische Punktladung Q in den Mittelpunkt einer Kugel mit Radius R und berechnen den elektrischen Fluss $\Phi_{\text{el.}}$ des von der Ladung erzeugten Feldes durch die Kugeloberfläche. Er ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi_{\text{el}} = \iint\limits_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Häufig ordnet man einem Flächenelement ΔA (bzw. dA) einen Vektor $\Delta\vec{A}$ (bzw. $d\vec{A}$) zu, dessen Betrag gleich dem Betrag des Flächenelementes ist und der **senkrecht** auf diesem steht. Für Elemente der Kugeloberfläche zeigt der Vektor überall radial nach außen — ebenso wie die elektrische Feldstärke. Daher kann das Skalarprodukt durch das Produkt der Beträge ersetzt werden:

$$\Phi_{\text{el}} = \iint\limits_{(A)} E \cdot dA = R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \, \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,R^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Der elektrische Fluss hat — unabhängig von der Größe der Kugelschale — stets denselben Wert Q/ϵ_0.

5.10.5 Beispiel: Trägheitsmomente

Das letzte Beispiel hat bereits gezeigt, dass mit den vorgestellten zwei- und dreidimensionalen Integralen nicht nur Flächen und Volumina berechnet werden können, sondern auch andere Größen, die über Oberflächen- bzw. Volumenintegrale definiert sind. In diesem abschließenden Abschnitt betrachten wir die **Trägheitsmomente** eines Vollzylinders und einer Vollkugel bei Rotation um die jeweilige Figurenachse.

- Das Trägheitsmoment Θ spielt bei der **Rotation** eines Körpers eine ähnliche Rolle wie seine Masse bei Translationsbewegungen. Im Gegensatz zu dieser hängt es von der Form und Massenverteilung des Körpers und auch von der Lage der Drehachse ab. Es ist folgendermaßen definiert:

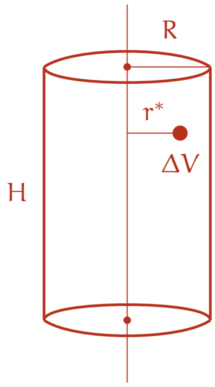
$$\boxed{\Theta = \iiint\limits_{(M)} (r^*)^2 \, dm} \tag{5.57}$$

  wobei r^* der **senkrechte Abstand** ist, den das Masseelement dm von der Drehachse hat und das Integral über die gesamte Masse M des Körpers zu berechnen ist.

- Für homogene Körper ist das Massenelement das Produkt aus der Massendichte η und dem zugehörigen Volumenelement dV, also $dm = \eta\,dV$. Das Massenintegral wird somit auf ein Volumenintegral zurückgeführt:

$$\Theta = \eta \iiint\limits_{(V)} (r^*)^2 \, dV \tag{5.58}$$

- Vollzylinder mit Radius R, Höhe H und Masse M: die Rechnung erfolgt in Zylinderkoordinaten, wobei die Zylinderachse,



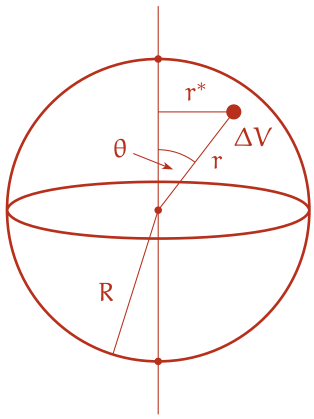
die auch Drehachse ist, mit der z-Achse zusammenfällt. Dann ist für jedes Volumenelement der senkrechte Abstand r^* gleich der Koordinate ρ, und das Trägheitsmoment beträgt

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Zylinder}} &= \eta \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz = \eta \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot H \\ &= \frac{1}{2} R^2 \cdot \eta \, R^2 \, \pi \, H\end{aligned}$$

Die Zylindermasse berechnet sich zu $M = \eta V = \eta R^2 \pi H$, so dass das Trägheitsmoment geschrieben werden kann

$$\boxed{\Theta_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} M R^2}$$

Zum Vergleich: ein dünnwandiger Hohlzylinder, bei dem alle Massenelemente den gleichen Abstand R von der Drehachse haben, besitzt das Trägheitsmoment $\Theta_{HZ} = M R^2$.



- Vollkugel mit Radius R und Masse M: wir führen die Rechnung in Kugelkoordinaten durch und legen den Ursprung in den Kugelmittelpunkt. Drehachse ist wieder die z-Achse. Der senkrechte Abstand eines Massenelementes von der Drehachse beträgt dann $r^* = r \sin\theta$.

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Kugel}} &= \eta \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \eta \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot \left[\frac{1}{3} \cos^3\theta - \cos\theta \right]_0^{\pi} \cdot 2\pi\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $f(x) = \sin^3 x$ war in Abschnitt 5.5.3 berechnet worden. Einsetzen der Grenzen 0 und π liefert schließlich

$$\Theta_{\text{Kugel}} = \eta \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} R^2 \cdot \eta \, \frac{4\pi}{3} R^3$$

oder mit der Kugelmasse $M = \eta \, (4\pi/3) \, R^3$

$$\boxed{\Theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} M R^2}$$

Für eine dünnwandige Hohlkugel erhält man $\Theta_{HK} = (2/3) \, M R^2$. Die Rechnung wird der Leserin / dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

6 Einfache Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

6.1 Wachstum einer Population

Wir nehmen an, dass von einer Population (z. B. einer Bakterienkultur) zum Zeitpunkt t die Anzahl $N(t)$ Individuen vorhanden sei. Wir wollen untersuchen, wie sich die Zahl im Laufe der Zeit ändert.

6.1.1 Aufstellen der Differentialgleichung

- Die genaue Bevölkerungsentwicklung hängt von vielen Faktoren ab wie der Temperatur, dem Nahrungsangebot, der Gegenwart von Fressfeinden etc. Wir setzen voraus, dass stets genügend Nahrung vorhanden ist, die Temperatur konstant gehalten wird und niemand die Individuen dezimiert. Äußere Parameter sollen die Bevölkerungsentwicklung also **nicht** beeinflussen.

- Dann ist die Annahme nahe liegend, dass das Wachstum nur von der Anzahl der jeweils vorhanden Individuen und der (konstanten) Reproduktionsrate abhängt. Wir können für den Zuwachs ΔN in einem Zeitintervall Δt also schreiben

$$\Delta N \sim N(t) \cdot \Delta t \tag{6.1}$$

Wachstumsrate k

- Um das Proportionalitätszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen zu können, führen wir eine Proportionalitätkonstante ein, die **Wachstumsrate** k. Außerdem gehen wir zu infinitesimalen Größen dN und dt über:

$$dN = k \cdot N(t) \cdot dt \tag{6.2}$$

Division durch dt liefert

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = k\,N(t)} \tag{6.3}$$

- Gleichung (6.3) verknüpft eine — noch unbekannte — Funktion $N(t)$ mit ihrer Ableitung. Eine solche Gleichung nennt man **Differentialgleichung**.

- Hier handelt es sich um die einfachste denkbare Art, eine **homogene gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Die Begriffe haben folgende Bedeutung. Homogen: alle Terme enthalten $N(t)$ oder ihre Ableitung; gewöhnlich: die gesuchte Funktion hängt nur von einer einzigen Variablen ab; linear: $N(t)$ und ihre Ableitung gehen nur linear in die Gleichung ein; 1. Ordnung: die höchste vorkommende Ableitung ist die erste.

- Gesucht ist die **Lösung $\mathbf{N(t)}$** der Differentialgleichung, d. h. diejenige Funktion, die die Gleichung beim Einsetzen erfüllt.

6.1.2 Lösung der Differentialgleichung

Anfangsbedingungen

- Um eine Differentialgleichung zu lösen, ist es wichtig, die **Anfangs- bzw. Randbedingungen** zu kennen. In unserem Fall ist das die Zahl der Individuen zum Zeitnullpunkt. Wir nennen sie N_0:

$$N(0) = N_0 \tag{6.4}$$

Trennung der Variablen

- Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung kann mit der Methode der **Trennung der Variablen** berechnet werden. Zu diesem Zweck bringen wir alle Faktoren der abhängigen Variablen N auf eine Seite der Gleichung und die unabhängige Variable t auf die andere:

$$\frac{dN}{N} = k\,dt \tag{6.5}$$

- Nun können beide Seiten integriert werden, und zwar von $t = 0$ bis zu einem späteren Zeitpunkt t. Dabei ist darauf zu achten, dass die Werte von N und t einander passend zugeordnet werden: zum Zeitnullpunkt beträgt die Individuenzahl nach Voraussetzung N_0, zum späteren Zeitpunkt t ist sie $N(t)$.

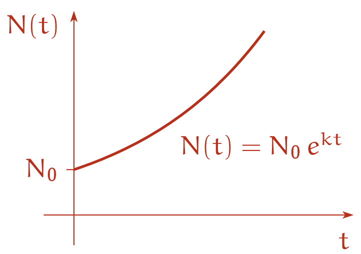
$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN^*}{N^*} = k \int_0^t dt^* \tag{6.6}$$

Die Integrationsvariablen sind hier in N^* und t^* umbenannt worden, um unterschiedliche Symbole für die Variablen und die Integrationsgrenzen zu verwenden.

- Ausführen der Integrationen liefert

$$\ln N(t) - \ln N_0 = k\,t \tag{6.7}$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = k\,t \tag{6.8}$$



- Durch Delogarithmieren beider Seiten erhält man das Endergebnis:

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{kt}} \tag{6.9}$$

- Die Bevölkerungszahl wächst gemäß einer **Exponentialfunktion** unbeschränkt an. In Wirklichkeit wird das Wachstum (zum Glück!) irgendwann gebremst, weil z. B. das Futter ausgeht oder die Lebensbedingungen aus anderen Gründen ungünstig werden. In diesem Fall müssen zusätzliche Terme in die Differentialgleichung [Gl. (6.3)] aufgenommen werden, so dass sich die Lösung ändert.

6.2 Radioaktiver Zerfall

- Die Anzahl der Atomkerne einer radioaktiven Substanz nimmt im Laufe der Zeit durch den Zerfall ab. Zur Zeit $t = 0$ seien N_0 Kerne vorhanden. Gesucht ist ihre Zahl $N(t)$ zu einem späteren Zeitpunkt t.

- Eine plausible Annahme ist auch hier, dass pro Zeitintervall umso mehr Kerne zerfallen, je mehr noch vorhanden sind:

$$\Delta N \sim -N(t) \cdot \Delta t \tag{6.10}$$

oder mit Differentialen und einer Proportionalitätskonstante geschrieben

$$dN = -\lambda \cdot N(t) \cdot dt \tag{6.11}$$

Zerfallskonstante λ

- Das Minuszeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass ΔN bzw. dN wegen des Zerfalles **negativ** sind. Die Proportionalitätskonstante λ ist damit positiv. Sie heißt **Zerfallskonstante** der Substanz.

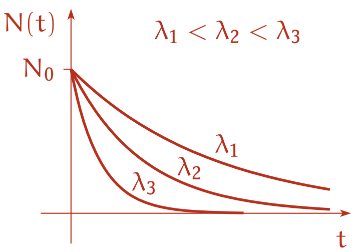
- Die Lösung $N(t)$ kann auch hier mittels Trennung der Variablen berechnet werden. Sie lautet

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}} \tag{6.12}$$

- Die Rechnung und das Ergebnis sind sehr ähnlich wie beim vorher behandelten Wachstumsprozess; lediglich der Exponent enthält ein negatives Vorzeichen.

Halbwertszeit $T_{1/2}$

- Die Zerfallskonstante hängt mit der **Halbwertszeit $T_{1/2}$** der Substanz zusammen. Nach ihr hat die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Kerne auf die Hälfte abgenommen, d. h.



$$N\left(T_{1/2}\right) = \frac{1}{2} N_0 \tag{6.13}$$

Der Zusammenhang lautet

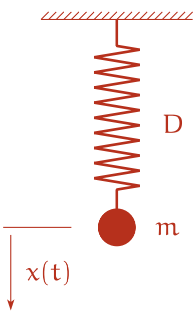
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{6.14}$$

Je größer λ bzw. je kürzer die Halbwertszeit ist, desto schneller zerfällt die Substanz.

- An diesen Beispielen erkennt man die große Bedeutung, die die **Exponentialfunktion mit Basis e** in der Natur hat: sie tritt **immer dann auf, wenn die Ableitung einer Funktion proportional zur Funktion selbst** ist.

6.3 Harmonische Schwingung eines Federpendels

- Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder, an der ein Gegenstand geeigneter Masse (z. B. eine kleine Stahlkugel) aufgehängt ist. Die Federkonstante sei D, die Masse des Gegenstandes m.



- Wenn die Masse aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und losgelassen wird, beginnt sie, um diese Lage zu schwingen. Wir wollen die mathematische Form der Schwingung und ihre Periodendauer ermitteln. Reibungseffekte werden vernachlässigt.

- Die **Bewegungsgleichung** ergibt sich aus der **Kräftebilanz**: Die Rückstellkraft der Feder infolge der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist die Kraft, die die Masse beschleunigt; also

$$m\, a(t) = -D\, x(t) \tag{6.15}$$

Hierbei ist $x(t)$ die Auslenkung der Masse aus der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t und $a(t) = \ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$ ihre Beschleunigung.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}\,x(t)} \tag{6.16}$$

- Dies ist eine **Differentialgleichung 2. Ordnung**. Hier versagt die Methode der Trennung der Variablen. Daher stellen wir einen **Lösungsansatz** auf; d. h. wir schreiben die Lösung in der vermuteten mathematischen Form, lassen deren Parameter aber unbestimmt.
- Schwingungen werden durch periodische Funktionen beschrieben. Wir wählen also den Ansatz

Lösungsansatz

$$x(t) = x_0\, e^{i\omega t} \tag{6.17}$$

Physikalisch bedeutungsvoll ist hiervon der **Realteil**. Die Ableitungen lauten

$$\dot{x}(t) = i\omega\, x_0\, e^{i\omega t} \tag{6.18}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\, x_0\, e^{i\omega t} \tag{6.19}$$

- Einsetzen von x und $\ddot{x}$ in die Differentialgleichung [Gl. (6.16)] liefert

$$-\omega^2\, x_0\, e^{i\omega t} = -\frac{D}{m}\, x_0\, e^{i\omega t} \tag{6.20}$$

und damit

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \text{bzw.} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} \tag{6.21}$$

- Der Ansatz [Gl. (6.17)] löst die Differentialgleichung. Durch Einsetzen der Lösung und ihrer zweiten Zeitableitung erhält man **die Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit ω, die (gewöhnliche) Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ bzw. die Periode $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$** der Schwingung. Die Maximalamplitude x_0 kann beliebig gewählt werden; sie hängt davon ab, wie weit die Masse vor dem Loslassen ausgelenkt worden ist.
- Als Lösungsansatz könnten auch die Funktionen

$$x(t) = x_0\, e^{-i\omega t} \tag{6.22}$$

$$x(t) = x_0\, \sin(\omega t) \tag{6.23}$$

$$x(t) = x_0\, \cos(\omega t) \tag{6.24}$$

verwendet werden. Sie liefern alle das gleiche Ergebnis für die Schwingungsfrequenz. Die komplexe Exponentialfunktion ist beim Rechnen oft handlicher als die trigonometrischen Funktionen, vor Allem wenn man in die Differentialgleichung einen Dämpfungsterm aufnimmt, der Reibungseffekte beschreibt. Dies soll hier nicht mehr behandelt werden. Physikalisch bedeutsam ist immer der Realteil eines komplexen Ergebnisses.